ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 18 MARS 1929.

PRÉSIDENCE DE M. Louis MANGIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

CONSTRUCTION DE CHEMINS DE FER. — *Ligne de Nice à Coni.* Note de M. P. Séjourné.

Historique. — A la fin d'octobre dernier, on a inauguré une ligne de Nice à Coni : c'est par elle que vont maintenant à Nice, la Haute-Italie, la Suisse, l'Allemagne.

Sur le passage par Marseille, le raccourci par Modane-Coni est, pour Genève, de 217^{km}.

Il est, pour Paris, de 97^{km}, mais évidemment, Paris et l'Angleterre continueront à passer par Marseille.

Le traité de 1860, qui nous a rendu Nice, laisse à la France, au milieu du cours de la Roya, trois communes (Breil, Saorge et Fontan); mais la source de la Roya, qui est au col de Tende, son embouchure, qui est à Vintimille, restent italiennes.

De 1882 à 1910, les Italiens ont construit une ligne de Coni à Vievola, traversant les Alpes sous le col de Tende.

En 1904, la France et l'Italie ont convenu d'une ligne de Nice à Coni, avec, à Breil, un embranchement sur Vintimille. Sa partie française a été déclarée d'utilité publique et concédée à la Compagnie P. L. M. par la loi du 16 mars 1910.

De Nice (carte), la ligne monte par la vallée du Paillon, passe dans celle de la Bevera, puis dans celle de la Roya. De Breil, une ligne monte au Nord vers Coni, l'autre descend au Sud vers Vintimille.

Caractéristiques. — Longueur :

	km
Ligne directe........................	58,767
Embranchement Breil-Vintimille.......	4,397
En tout..................	63,164



Fig. 1.

Déclivité maxima à ciel ouvert, 25mm, réduite à 20mm en souterrain, et de $\frac{1200}{R}$ dans les courbes de rayon R.

Une voie, sauf dans les longs souterrains par nécessité d'aérage.

Travaux. — Sur les 63km, il y a 45 souterrains mesurant ensemble 23km,6, plus du tiers de la ligne.

Sur les 40km à ciel ouvert, on a déblayé 4 millions de mètres cubes.

Il y a plus de 200 ouvrages, en maçonnerie, en métal, en béton armé.

Il y a 150 voûtes en maçonnerie d'une ouverture cumulée de 2000m, 413m de travées métalliques.

Dépenses. — Environ 450 millions, dont à peu près 45 millions avant la guerre.

On peut compter la moitié environ en main-d'œuvre, laquelle était presque uniquement italienne.

Difficultés d'exécution. — La ligne traverse le Crétacé supérieur, du Trias, quelques lambeaux de Jurassique et de Permien.

Le Crétacé se présente en bancs de calcaire marneux, plissés, disloqués, séparés par des feuillets d'argile de quelques millimètres. Quand ils pendent vers la vallée et que les travaux les entament, tout se met en mouvement.

Dans le Trias, on rencontre du sulfate de chaux à l'état, soit de gypse, soit d'anhydrite; ça été une grosse difficulté.

Le gypse est un sulfate hydraté ($SO^4Ca + 2H^2O$), masse amorphe, gris violacé, un peu soluble (un peu plus de 2gr par litre d'eau). Or, l'eau sulfatée attaque les mortiers de ciment et surtout ceux de chaux qui tombent à la consistance du fromage mou.

On a même cru un instant que nous avions laissé employer comme sable de l'anhydrite broyée. Nous avons demandé une enquête à nos confrères, MM. Termier et Mesnager, qui ont établi que les décompositions étaient bien dues à l'eau sulfatée.

Le ciment alumineux, dit ciment fondu, résiste. Nous en avons employé plus de 15000T. Il y a eu quelques très rares décompositions, ensemble de moins d'une tonne.

Le souterrain du col de Braus (sous l'arête séparant les bassins du Paillon et de la Bevera), a 5939m : c'est le plus long souterrain à deux voies ayant ses deux têtes en France (1).

Vers la tête Coni, on a traversé 150m de gypse, puis 1000m d'anhydrite.

Or, au contact de l'eau, l'anhydrite (SO^4Ca) devient du gypse et gonfle d'environ 40 pour 100.

Faute de crédits, on a arrêté les travaux de 1915 à 1919 : l'eau coula

---

(1) Vient ensuite celui de la Nerthe (Avignon-Marseille), 4620m.

pendant 4 ans sur l'anhydrite, en fit du gypse, et des parties de revêtement s'écrasèrent.

Voici la coupe du terrain :

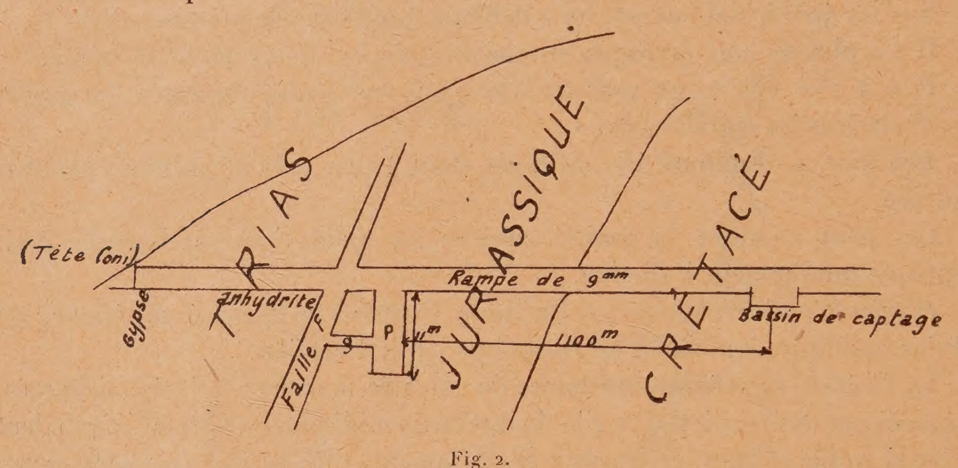


Fig. 2.

Le Crétacé donne beaucoup d'eau, mais cette eau-là, captée, ne nous incommodait pas.

La faille F était remplie d'argile; pour l'assécher, on creusa un puits p de 11^m, puis une galerie g, et, pour assurer le débit du puits, 8 l-s, on installa une trompe à eau : actionnée par l'eau captée du Crétacé, elle fonctionne sans arrêt depuis 7 mois.

Dans les souterrains de Gigne et de Caranca, on a encore rencontré de l'anhydrite. Comme il n'y avait pas d'eau, on s'est borné, après déblai, à badigeonner la roche au coaltar : aussitôt le revêtement fait, on a injecté derrière, du goudron sous pression.

Principaux ouvrages de la ligne (projections).

Viaduc d'Erbossiéra. — Voûte en ellipse surhaussée; 36^m de portée, 24^m de montée.

Viaduc de l'Escarène. — 11 arches de 15^m; hauteur 38^m; tout en moellons, pas de pierre de taille.

Pont sur la Bevera. — Le Génie militaire a imposé la direction de l'ouvrage, lequel traverse la rivière très en biais. Une pile l'aurait barrée. On a posé la travée sur une ogive de 25^m appuyée sur les deux flancs.

Tête du souterrain du Grazian (3887^m) *sous le faîte, entre la Bevera et la Roya.* — En juin 1914, 9 maçons furent tués par la chute d'une « cloche » de roche brisée. Ça été l'accident le plus grave (en 17 ans sur toute la ligne il y a eu 82 tués).

Pont de la Lavina. — A une culée, sous la vase, on n'a trouvé que le gypse, et à 22^m, et fuyant. On a supporté les murs en retour par de grandes consoles en béton armé de 8^m de porte à faux.

Viaduc des Éboulis. — Huit arches de 18^m; fondé sur le roc en place; jeté par-dessus un énorme éboulement.

Pont de Saorge sur la Roya. — Portée : $41^m,50$-60^m de hauteur au-dessus de la rivière. Derrière, on aperçoit le village de Saorge comme plaqué sur la montagne. Masséna l'a pris en 1794. Dans une tranchée sous le village, nous avons trouvé les squelettes de quelques soldats.

Pont de Scarassoui sur la Roya. — Ellipse surhaussée de 48^m de portée, 32^m de montée, rail à 42^m au-dessus de la Roya, en courbe de 300^m, en rampe de 21^{mm}; voûte construite par rouleaux sur cintre à câbles comme aux ponts de Saorge et d'Erbossiera. D'ordinaire, dans les courbes, la voûte est sur plan rectangulaire : il faut alors l'élargir de la flèche de la courbe, et accepter, au grand dommage de l'aspect, une sensible différence de largeur des pilastres d'amont et d'aval. Ici, la douelle est un conoïde engendré par une droite horizontale s'appuyant d'une part sur la verticale du centre de la courbe de la voie, d'autre part sur l'ellipse moyenne d'intrados. La face concave a $47^m,50$ d'ouverture, la face convexe, $48^m,50$. Le fruit est de 2 pour 100 dans la partie concave, de 6 pour 100 dans la partie convexe, il n'y a pas de porte à faux dû à la courbe.

C'est le premier grand ouvrage qu'on rencontre en venant d'Italie. C'est comme la porte d'entrée en France : on s'est efforcé de la faire digne d'elle.

HYDRODYNAMIQUE. — *Sur un problème fondamental de la théorie des tourbillons.* Note de M. **Henri Villat.**

Un théorème classique et fondamental de la théorie des tourbillons est celui qui permet de calculer le champ des vitesses d'un liquide indéfini, en fonction du champ des tourbillons supposé connu au même instant.

On sait que Poincaré a donné une extension de ce théorème, en considérant le cas où le liquide n'est pas illimité, mais est contenu dans un vase solide fixe qu'il remplit entièrement. Mais les formules auxquelles il a été conduit présentent cet inconvénient « d'exiger la connaissance des vitesses u, v, w, sur la paroi du vase, alors que ces vitesses ne font pas partie des données qui sont seulement les tourbillons ».

Or il est possible de tourner cette difficulté. Supposons d'abord le vase *fixe*, comme dans le cas examiné par Poincaré. On peut tout d'abord écrire les composantes de la vitesse sous la forme

$$(1)\qquad u=\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial R}{\partial z},\qquad \ldots,$$

les fonctions P, Q, R, étant des expressions de la forme

$$(2)\qquad P=\frac{1}{2\pi}\iiint_V \frac{\xi'}{r}\,d\tau'+\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\gamma' v'-\beta' w'}{r}\,d\sigma',\qquad \ldots,$$

(ξ, η, ζ) est le tourbillon au point x, y, z; α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à la surface du vase, vers l'extérieur; les intégrales triples sont étendues au volume V occupé par les tourbillons, les intégrales de surface intéressent la surface S du vase donné. Moyennant ce qui précède, on peut écrire pour u, v, w, des valeurs de la forme

$$u = A + A_1, \quad \ldots, \tag{3}$$

A, B, C dépendent uniquement des tourbillons, et l'on a explicitement

$$4\pi A_1 = \frac{\partial}{\partial y}\int\int_S \frac{\beta' u' - \alpha' v'}{r}\,d\sigma' - \frac{\partial}{\partial z}\int\int_S \frac{\alpha' w' - \gamma' u'}{r}\,d\sigma'.$$

Cherchons à appliquer les formules (3) aux points de la surface S elle-même. Il figure dans A_1 des dérivées partielles de potentiels de simple couche. Il est bien connu que de telles dérivées présentent des discontinuités au passage de la couche. Plus précisément on sait que la dérivée normale subit une discontinuité de $4\pi\delta$ si δ est la densité au point envisagé, supposé simple et muni d'un plan tangent déterminé. Les dérivées tangentielles restent au contraire continues (cf. E. Goursat, *Analyse*, 3, p. 281 et suiv., et H. Petrini, *Acta mathematica*, 31, 1928, p. 127).

Si au lieu de calculer les dérivées en deux points, l'un intérieur et l'autre extérieur à S, et de faire tendre ces deux points vers un même point de S, on fait directement le calcul en supposant d'emblée que le point x, y, z appartient à la surface S, on obtient d'autres expressions dont la valeur n'est pas égale à celles dont on vient de parler : la nouvelle dérivée normale ainsi calculée diffère de $2\pi\delta$ des deux valeurs limites antérieurement introduites.

Si l'on tient compte de ces circonstances, l'application des formules (3) aux points de la surface S, donne après réductions diverses, et en adoptant pour les intégrales de surface les expressions calculées sur la surface S elle-même, trois équations telles que la suivante

$$\frac{1}{2}u = A + \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{u'(\alpha_1\alpha' + \beta_1\beta' + \gamma_1\gamma') - \alpha'(\alpha_1 u' + \beta_1 v' + \gamma_1 w')}{r^2}\,d\sigma, \tag{4}$$

α, β, γ désignent les cosinus directeurs de la droite MM' qui joint le point M de S considéré, au point M' de la surface, où l'élément d'aire est $d\sigma'$.

On a ainsi trois équations de Fredholm d'un type classique, et dont l'intégration fera connaître les vitesses sur la paroi S du vase en fonction des tourbillons (lesquels figurent dans A, B, C). Après quoi l'application

des équations (1) et (2) fournira les vitesses dans tout le fluide, en fonction seulement des tourbillons.

Dans le cas de deux dimensions, les équations (4) seront remplacées par les suivantes, où A et B désignent toujours les termes provenant des tourbillons comme ci-dessus, mais où le potentiel $\frac{1}{r}$ devra simplement être remplacé par le potentiel $\log\frac{1}{r}$ du plan,

$$\frac{1}{2}u = A - \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\beta_1 V_t'}{r} ds',$$

$$\frac{1}{2}v = B + \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\alpha_1 V_t'}{r} ds',$$

V_t désigne ici la vitesse tangentielle $\alpha v - \beta u$ sur le contour C du vase, et une combinaison évidente fournit l'équation

$$V_t = 2(\alpha B - \beta A) + \frac{1}{\pi}\int_C V_t' \frac{\cos\varphi}{r} ds',$$

φ désignant l'angle de la normale extérieure à C, avec la droite MM' joignant les deux points du contour. Cette dernière équation est équivalente à une équation obtenue par M. Birkeland dans une très intéressante étude (*Comptes rendus*, 163, 1916, p. 200), où le problème proposé est ainsi ramené à une équation de Fredholm.

Tout ce qui précède concerne un vase fixe. Il est facile de ramener le cas général à ce cas particulier. En effet, soit Ω le vecteur tourbillon en un point du fluide et soit ω la rotation instantanée du vase au même instant; soit enfin Ω_r le tourbillon dû à la vitesse relative envisagée par rapport au vase lui-même; on démontre, et il est à peu près évident, qu'on a

$$(\Omega) = (\omega) + (\Omega_r).$$

Par suite, si l'on étudie le mouvement relatif du fluide par rapport au vase, la connaissance, à chaque instant, du tourbillon absolu Ω, déterminera Ω_r, et l'on sera ramené à appliquer la méthode exposée plus haut, pour le cas où S est considéré comme fixe. Après quoi il restera, les vitesses étant ainsi calculées dans le mouvement relatif, à les composer avec les vitesses provenant du mouvement du vase lui-même, pour obtenir les vitesses vraies en chaque point et à chaque instant.

M. F.-E. **Fournier** fait hommage à l'Académie d'une brochure portant comme titre : *Cet opuscule présente l'intérêt nouveau d'expliquer par quelles causes dynamiques un croiseur, notamment, utilise, dans sa translation en mer calme, au profit de sa vitesse, une partie de sa force motrice d'autant plus grande que son tonnage est moins grand.*

M. P. **Séjourné** fait hommage à l'Académie d'un album intitulé *Nice-Coni. Section française.*

ÉLECTIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à l'élection d'un Membre de la Section de Médecine et Chirurgie en remplacement de M. *Fernand Widal* décédé.

Au premier tour de scrutin, le nombre de votants étant 47,

M. Charles Achard	obtient..........	40 suffrages
M. Pierre Teissier	»	5 »
M. Joseph Babiński	»	1 suffrage
M. Serge Voronoff	»	1 »

M. **Charles Achard**, ayant obtenu la majorité absolue des suffrages, est proclamé élu.

Son élection sera soumise à l'approbation de M. le Président de la République.

CORRESPONDANCE.

M. le **Ministre de l'Air** invite l'Académie à lui désigner un Membre de la Section de Mécanique et un Membre de la Section de Physique, qui feront partie du *Conseil supérieur des Recherches scientifiques intéressant l'Aéronautique*, créé par l'arrêté du 9 février 1929.

M. **Jules Richard**, élu Correspondant pour la Section de Géographie et Navigation, adresse des remercîments à l'Académie.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *Il R. Istituto Superiore Agrario in Portici*, 1872-1928.

2° *Les Poissons des eaux douces d'Asie Mineure*, par Jacques Pellegrin. Note complémentaire. (Présenté par M. E.-L. Bouvier.)

HISTOIRE DES ACADÉMIES. — *Biostatistique académique.* Note de M. **Paul Pelseneer**.

I. M. Ch. Richet a fait connaître tout récemment (*Comptes rendus*, 188, 25 février 1929), l'âge de l'élection, l'âge de la mort et la durée de la vie académique des membres de l'Académie des Sciences.

En 1925, Sir Arthur Schuster puis R. Pearl ont donné des renseignements analogues au sujet, respectivement, des membres de la Société Royale de Londres (*Proc. Roy. Soc. London*, série A, 107, n° 743) et de l'Académie nationale des Sciences de Washington (*Journ. Nat. Acad. Sc.*, 11, n° 12). De mon côté, en 1922, à l'occasion du 150e anniversaire de l'Académie royale de Belgique, j'avais dressé une statistique correspondante pour les membres de la Classe des Sciences de cette Académie; et, en 1925, cette statistique fut complétée, afin d'être comparable à celles de Londres et de Washington, mais elle demeure inédite.

II. Ces diverses enquêtes ne furent pas exécutées d'après un plan strictement uniforme. Néanmoins il n'est pas sans intérêt d'en confronter les résultats; car déjà en 1925 j'avais été frappé par la grande concordance que la statistique belge présente avec les statistiques britannique et américaine. Les conclusions principales qui découlent de la comparaison des quatre statistiques susmentionnées sont les suivantes :

1. *Age d'élection :*

Londres (1848 à la fin du XIXe siècle)	44,4 ans
Washington (1905 à 1924)	59 »
Bruxelles (1907 à 1924)	45 »
Paris (anciens membres)	50 »

Mais, dans les quatre corps savants, cet âge est allé et va *en s'élevant :* à Londres, pendant les quatorze dernières années considérées (ainsi, pour la période 1918-1922, il a passé à 47,6 ans); à Washington, l'âge n'était, de 1864 à 1883, que de 44,47 ans et, de 1884 à 1904, que de 46,54; à Bruxelles, de 1820 à 1924, il a monté de 36,5 ans à 45; enfin, à Paris, il s'est élevé de 50 à 55 (membres nouveaux). L'âge d'élection à Paris serait certainement plus bas et analogue à celui des autres pays, si, le nombre des membres de l'Académie des Sciences était, proportionnellement à la population, aussi élevé que celui des membres des Institutions similaires de Londres, de Washington et même de Bruxelles.

2. *Age moyen :*

Londres	60,9 ans
Washington	50,74 »
Bruxelles	60,8 »

3. *Age de la mort :*

Bruxelles	66,5 ans
Paris	71 »

A Washington, il est de 5 ans plus élevé que l'âge moyen de la mort des blancs mâles des États-Unis; de même à Londres, il est bien supérieur à l'âge moyen de décès d'après les tables générales.

4. *Durée de la vie académique :*

Washington	19,51 ans
Bruxelles	21 »
Paris	21 »

En résumé, il y a dans ce domaine spécial de phénomènes, une remarquable analogie entre les divers pays.

GÉOMÉTRIE. — *Sur les invariants topologiques des réseaux de courbes et de surfaces.* Note de M. **Dubourdieu.**

I. Dans un Mémoire paru dans les *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminär der Hamburgischen Universität* (B. VII, H. 3, 1928) j'ai développé avec M. Bluschke la théorie des invariants topologiques des réseaux de courbes. Il est démontré notamment que les réseaux à confi-

guration hexagonale sont les seuls qui puissent être transformés en trois familles de droites parallèles. En particulier tout réseau à configuration hexagonale formé de droites est constitué par les tangentes à une courbe de troisième classe. Il était naturel de rechercher à quelles conditions doit satisfaire un réseau pour pouvoir être transformé topologiquement en un réseau formé par trois familles de droites quelconques. Il faut et il suffit pour cela que, en posant, d'après les notations utilisées dans la Note citée précédemment :

$$I_i = \Lambda'_{i+1} C - \Lambda'_{i+2} C - C(\omega_i - \omega_{i+1}) + \frac{1}{3},$$

les équations

$$\Lambda'_i I_i + (2\omega_i - 3C) I_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

dont deux seulement sont indépendantes, admettent une solution C commune. La condition $I_i = 0$ exprime que la $i^{\text{ième}}$ famille du réseau est applicable sur un faisceau de droites.

Il est démontré dans le Mémoire cité au début de cette Note, que les seuls réseaux admettant un groupe continu transitif de transformations topologiques sont les réseaux à configuration hexagonale. Tout autre réseau, ou bien n'en admet pas, ou bien admet un groupe continu à un paramètre; il faut et il suffit pour cela que tous les invariants du réseau soient fonctions de l'un d'entre eux, ω_1 par exemple, et la transformation infinitésimale du groupe est alors :

$$\varphi' \begin{vmatrix} \Lambda'_1 f & \Lambda'_2 f \\ \Lambda'_1 \omega_1 & \Lambda'_2 \omega_1 \end{vmatrix} = 0,$$

φ étant une fonction de ω_1 définie par une quadrature :

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{\omega_2 \Lambda'_1 \omega_1 - \omega_1 \Lambda'_2 \omega_1}.$$

II. On peut de même développer dans l'espace une théorie des réseaux de surfaces (quatre familles de l'∞^1 surfaces). Nous désignerons par S_i une surface de la $i^{\text{ème}}$ famille et par L_{ij} la ligne d'intersection d'une surface S_i et d'une surface S_j.

On rencontre d'abord des invariants relatifs π_{ij} satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) $$\pi_{12} = \pi_{34}, \qquad \pi_{13} = \pi_{24}, \qquad \pi_{14} = \pi_{23}$$

(2) $$\pi_{12} + \pi_{13} + \pi_{14} = 0.$$

La condition $\pi_{12} = \pi_{34} = 0$ exprime que les lignes L_{12} et L_{34} se répartissent sur une famille de l'∞^1 surfaces.

L'égalité (2) montre que, si cette condition est réalisée pour deux des trois couples (L_{12}, L_{34}) (L_{23}, L_{14}) (L_{13}, L_{24}), elle l'est aussi pour le troisième, théorème que j'ai pu démontrer de manière purement géométrique.

Si les invariants π_{ij} sont tous nuls, le réseau peut être transformé topologiquement en quatre familles de plans parallèles et il est dit alors *à configuration octogonale*.

J'ai démontré géométriquement que les réseaux de plans présentant la configuration octogonale sont constitués par les plans tangents communs aux quadriques d'un faisceau tangentiel.

Si les invariants relatifs π_{ij} ne sont pas tous nuls, ils donnent naissance à un invariant absolu $\pi = \frac{\pi_{ij}}{\pi_{kh}}$ dont on peut donner une interprétation géométrique simple.

On trouve ensuite aisément un système complet d'invariants relatifs et absolus d'ordre supérieur. Indiquons par exemple quatre invariants relatifs ρ_i liés par la relation

$$\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4 = 0.$$

La condition $\rho_i = 0$ exprime que le réseau de courbes découpé sur S_i par les trois autres familles du réseau est à configuration hexagonale. Si cette condition est réalisée pour trois des familles, elle l'est aussi pour la quatrième. Il y aurait intérêt à trouver une démonstration purement géométrique de cette proposition.

Contrairement à ce qui se passe dans le plan, les réseaux à configuration octogonale ne sont pas les seuls qui admettent un groupe continu transitif de transformations. Il faut et il suffit pour cela que l'invariant π soit constant et que de plus on ait $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0$.

Indiquons pour terminer que les invariants du réseau permettent d'exprimer sous une forme analytique très simple les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un réseau de surfaces soit topologiquement applicable sur quatre faisceaux de plans.

GÉOMÉTRIE. — *Un théorème sur les quadriques analogue à celui de Chasles sur les coniques.* Note de M. **Étienne Halphen**, présentée par M. Hadamard.

Définition. — Soient C_1 et C_2 deux coniques se coupant en quatre points distincts A, B, C, D. Soient γ_1 le rapport anharmonique des quatre points, considérés comme appartenant à C_1, et γ_2 leur rapport anharmonique

compté sur C_2. Nous appellerons rapport anharmonique des coniques C_1 et C_2 et nous désignerons par (C_1, C_2), le quotient

$$\rho = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \quad (^1).$$

Cette quantité est évidemment projective et l'on définira le rapport anharmonique de deux cônes (du second ordre) de même sommet comme étant celui des sections de ces cônes par un plan quelconque.

Si les coniques sont des cercles : $\rho = e^{2i\nu}$, ν étant l'angle des deux cercles; leur rapport anharmonique ne dépend donc que de leur angle. Cela posé :

Théorème. — *Si* C_1 *et* C_2 *sont deux coniques tracées sur une quadrique, les cônes ayant pour directrices ces coniques et pour sommet commun un point* M *variable de la surface, ont un rapport anharmonique constant.*

Pour le démontrer, transformons homographiquement la quadrique en sphère. Alors C_1 et C_2 sont des cercles; nous déterminerons le rapport anharmonique des cônes MC_1 et MC_2 en les coupant par le plan inverse de la sphère par rapport au point M. Les sections sont deux cercles C'_1 et C'_2. Leur rapport anharmonique ne dépend que de leur angle, lequel est égal à C_1 et C_2; il est donc constant; ce qui démontre le théorème.

Cette quantité constante sera dite rapport anharmonique des coniques C_1 et C_2 sur la quadrique (²). Appelons encore coniques conjuguées deux coniques, d'un plan ou d'une quadrique, dont le rapport anharmonique est égal à — 1. Dans le cas d'une quadrique S, cela veut dire que les plans des deux coniques sont conjugués par rapport à S.

Comme application, on a les théorèmes suivants :

a. Pour que la conique harmonique tangentielle (conique de Salmon) relative à C_1 et C_2 se décompose, il faut et il suffit que $(C_1, C_2) = -1$.

b. Par dualité, on définira le rapport anharmonique tangentiel de deux coniques, en remplaçant les quatre points d'intersection par les quatre tangentes communes.

On voit d'ailleurs aisément que chaque détermination de ce rapport anharmonique tangentiel est égale à une détermination du rapport anhar-

---

(¹) Il y a six déterminations, selon l'ordre des points et des coniques; deux sont indépendantes, mais on pourra en distinguer une, si l'on peut séparer deux des quatre points.

(²) k est défini sans ambiguïté, car dans le théorème précédent, deux des génératrices communes aux deux cônes se séparent des autres.

monique ponctuel. Il en résulte que si la conique ponctuelle de Salmon se décompose, il en est de même de la conique tangentielle, et réciproquement; on peut d'ailleurs le vérifier directement.

Les théorèmes précédents donneront des énoncés corrélatifs. En particulier :

Si l'on coupe deux cônes circonscrits à une quadrique par un plan tangent à la surface, les deux sections ont un rapport anharmonique constant.

Observation ajoutée par M. **Hadamard** *à la Note précédente.*

Comme me le fait remarquer M. P. Lévy, il est important de noter que, si les deux coniques Γ, Γ' de l'espace, sécantes en deux points, sont projetées d'un même point de vue M, les *deux* rapports anharmoniques γ_1, γ_2 peuvent prendre des valeurs arbitraires, suivant les positions du point M.

Chacune des quadriques passant par Γ et Γ' est le lieu des points M tels que $\gamma_1 : \gamma_2$ soit constant.

Quant au lieu des points tels que γ_1 et γ_2 soient tous deux constants, c'est une conique dont le plan passe par l'intersection des plans de Γ et de Γ'.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur les surfaces principales des complexes de droites.* Note de M. **Paul Mentré**, présentée par G. Kœnigs.

I. Considérons dans l'Espace projectif un complexe non spécial (r) engendré par la droite r qui dépend de trois paramètres. On sait que les ∞^1 complexes linéaires tangents γ — qui contiennent les droites $r+dr$ — forment un faisceau $[\gamma r]$ de directrice double r.

Associons à r un complexe linéaire tangent γ et donnons à r un déplacement à un paramètre p; le complexe γ admet pour caractéristique une congruence linéaire. Imposons à cette congruence d'avoir ses deux directrices confondues avec r. Cela revient à imposer au complexe $\gamma+\frac{\partial\gamma}{\partial p}dp$ d'appartenir au faisceau $[\gamma r]$; par suite le complexe linéaire γ est *stationnaire* au sens de Klein et la droite r engendre une *surface principale*.

Lorsque la caractéristique d'un complexe linéaire mobile γ est une congruence linéaire spéciale, ce complexe γ enveloppe un complexe à foyer

inflexionnel quadruple (¹). En utilisant les propriétés énoncées dans une Note précédente (²), on obtient le théorème suivant :

Quand la génératrice d'un complexe décrit une surface principale, le complexe linéaire stationnaire γ qui correspond à ce déplacement garde avec la surface principale un contact du deuxième ordre ; ce complexe stationnaire γ contient les deux droites s_1, s_2, tangentes à deux lignes asymptotiques particulières de la surface principale ; chaque droite du complexe enveloppé par γ a ses quatre foyers inflexionnels confondus avec un point de la surface principale.

Nous retrouvons et complétons ainsi des résultats classiques (³).

II. On sait qu'en général il existe trois surfaces principales Σ, Σ', Σ'', passant par une génératrice r. La répartition des plans tangents aux trois surfaces principales relativement aux différents points de r a été étudiée par M. Kœnigs (⁴). En résumé, les points m_1 et m_2 où un plan passant par r est tangent à deux surfaces principales Σ', Σ'', sont en involution ; par suite deux surfaces principales se touchent en deux points n_1, n_2, qui sont les points doubles d'une involution qui est d'ailleurs définie par les quatre foyers inflexionnels groupés convenablement deux à deux. A chacune des trois manières de grouper les foyers inflexionnels correspond une manière de choisir deux surfaces principales (parmi les trois Σ, Σ', Σ''),

III. Lorsque la génératrice r décrit le complexe (r) les droites s_1 et s_2 engendrent en général deux complexes (s_1) et (s_2).

Étant donné un complexe (r) on peut donc en général en déduire d'une façon projective six complexes associés deux à deux : (s_1) et (s_2), (s'_1) et (s'_2), (s''_1) et (s''_2).

Il est intéressant d'étudier la correspondance établie entre les génératrices s_1 et s_2. Cette correspondance a la propriété remarquable suivante : elle permet de décomposer les complexes associés (s_1) et (s_2) en ∞^2 surfaces développables, d'arêtes de rebroussement (n_1) et (n_2), de manière que la droite qui joint les points caractéristiques n_1, n_2, soit située à la fois dans les plans osculateurs en n_1 et n_2 aux courbes (n_1) et (n_2).

(¹) Paul Mentré, *Comptes rendus*, 175, 1922, p. 941.

(²) Paul Mentré, *Comptes rendus*, 178, 1924, p. 290.

(³) Jessop, *A Treatise on the Line Complex*, p. 310 (Cambridge, University Press, 1903).

(⁴) Kœnigs, *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, p. 115 et 116 (Paris, Gauthier-Villars, 1882).

Je me contenterai d'énoncer deux des résultats que j'ai obtenus par la méthode de M. Cartan.

En comparant les trois équations de Monge qui fournissent respectivement les développables des complexes (r), (s_1), (s_2) on constate qu'il est impossible que la correspondance entre les droites r, s_1; r, s_2 ou s_1, s_2, associe toutes les développables; autrement dit *une telle correspondance n'est jamais celle d'une applicabilité projective* [1].

L'une des trois équations de Pfaff qui fournissent deux à deux les surfaces principales devient complètement intégrable lorsque la correspondance des droites s_1 et s_2 est telle qu'il existe un complexe linéaire Γ qui soit tangent à la fois suivant s_1 et s_2 aux complexes (s_1) et (s_2). Il en résulte que *dans ce cas, les surfaces de deux des trois familles de surfaces principales s'assemblent en une congruence linéaire dépendant d'un paramètre et engendrant le complexe* (r).

IV. Il resterait notamment à considérer le cas où les complexes (s_1) et (s_2) sont dégénérés en congruences et celui, plus particulier, où le complexe γ ne dépend que de deux paramètres, les surfaces principales correspondantes devenant par suite des quadriques. Mais ce vaste sujet mérite une étude détaillée.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Les singularités d'intégrales de systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels arbitraires.* Note de M. **J. A. Lappo-Danilevski**, présentée par M. Hadamard.

Considérons un système à coefficients rationnels :

$$(1)\qquad \frac{dY}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{YU_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}\quad [2].$$

La matrice intégrale $Y(x)$ de ce système, se réduisant à I pour $x=b$, ainsi que les substitutions intégrales V_j qu'elle subit quand la variable x décrit des circuits entournant les points $a_j(j=1, 2, \ldots, m)$, sont des fonc-

---

(1) G. Fubini et E. Cech, *Geometria proiettiva differenziale* (Bologne, Nicola Zanichelli, 1927), p. 582.

(2) Voir notre Note (*Comptes rendus*, 186, 1928, p. 349).

tions entières des substitutions différentielles $U_j^{(r)}$

(2) $$Y(x) = +\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1\ldots m)} \sum_{r_1\ldots r_\nu}^{(1\ldots s)} U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} L_b(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,x)$$

(3) $$V_j = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1\ldots m)} \sum_{r_1\ldots r_\nu}^{(1\ldots s)} U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} P_j(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,b) \quad [1],$$

où L sont définies par les relations de récurrence

$$L_b(a_{j_1}^{r_1}\,|\,x) = \int_b^x \frac{dx}{(x-a_{j_1})^{r_1}}; \qquad L_b(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,x) = \int_b^x \frac{L_b(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\,|\,x)}{(x-a_{j_\nu})^{r_\nu}}\,dx,$$

et P_j s'expriment par les mêmes intégrales, prises suivant un lacet (a_j), commençant au point b et entourant le point a_j. Le développement (2) est valable dans toute portion finie du plan de la variable x, ne contenant aucun des points $a_1, \ldots, a_m$. Les substitutions intégrales (3) déterminent la *ramification* de la matrice (2) aux points a_j, et il reste à examiner la nature des *singularités essentielles uniformes* aux points indiqués. A cet égard nous considérons une *matrice élémentaire* $E_j(x)$, *ne possédant qu'un seul point singulier* a_j *à distance finie*, satisfaisant au système auxiliaire

$$\frac{dE_j}{dx} = \sum_{r=1}^{s} \frac{E_j W_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}$$

et représentable par le développement

(4) $$E_j(x) = (x-a_j)^{W_j^{(1)}} \sum_{\rho=0}^{\infty} C_j^{(\rho)} \frac{1}{(x-a_j)^\rho}$$

les matrices $C_j^{(\rho)}$ étant définies par les relations de récurrence

$$W_j^{(1)} C_j^{(\rho)} - \rho C_j^{(\rho)} - C_j^{(\rho)} W_j^{(1)} = \sum_{q=0}^{\rho-1} C_j^{(q)} W_j^{(\rho+1-q)} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots),$$

où $C^{(0)} = I$ et $W_j^{(\rho)} = 0$ si $\rho < s$. La matrice (4) est une fonction holomorphe des substitutions $W_j^{(r)}$

$$E_j(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{r_1\ldots r_\nu}^{(1\ldots s)} W_j^{(r_1)}\ldots W_j^{(r_\nu)} N(a_j^{r_1}\ldots a_j^{r_\nu}\,|\,x),$$

---

[1] C'est une généralisation immédiate des développements (3) et (4) de notre Note (*Comptes rendus*, 185, 1927, p. 439).

où

$$N(\overbrace{a_j^1\ldots a_j^1}^{\lambda \text{ fois}}\, a_j^{r_1}\ldots a_j^{r_\nu}\,|\,x)=\sum_{\varkappa=0}^{\lambda}\frac{1}{\varkappa!}\log^{\varkappa}(x-a_j)\frac{\gamma^{(\overbrace{1\ldots1}^{\lambda-\varkappa \text{ fois}}\,r_1\ldots r_\nu)}}{(x-a_j)^{r_1+\ldots+r_\nu-\nu}};\qquad r_1>1,$$

les constantes numériques $\gamma^{(r_1\ldots r_\nu)}$, pour les valeurs des indices

$$r_1,\ \ldots,\ r_\nu=1,\ \ldots,\ s,$$

étant définies par les relations

$$\gamma^{(r_1)}=-\frac{\lambda}{r_1-1},\qquad \text{si } r_1>1;\qquad \gamma^{(r_1)}=0,\qquad \text{si } r_1=1,$$

$$\gamma^{(r_1\ldots r_\nu)}=-\frac{\gamma^{(r_1\ldots r_{\nu-1})}}{r_1+\ldots+r_\nu-\nu},\quad \text{si } r_1>1;\quad \gamma^{(r_1\ldots r_\nu)}=-\frac{\gamma^{(r_1\ldots r_{\nu-1})}-\gamma^{(r_2\ldots r_\nu)}}{r_1+\ldots+r_\nu-\nu},\quad \text{si } r_1=1.$$

On peut démontrer qu'il existe un système unique de m substitutions $W_j^{(r)}$ ($j=1, \ldots, m$; $r=1, \ldots, s$), satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elles sont des fonctions holomorphes des substitutions $U_j^{(r)}$ au voisinage du système des substitutions nulles :

$$W_j^{(r)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1\ldots j_\nu}^{(1\ldots m)}\ \sum_{r_1\ldots r_\nu}^{(1\ldots s)} U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\,Q_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,b); \tag{5}$$

2° On a les représentations :

$$Y(x)=E_j(x).\overline{Y}_j(x), \tag{6}$$

où les matrices $\overline{Y}_j(x)$ et $\overline{Y}_j(x)^{-1}$ restent holomorphes dans un voisinage du point a_j. Les coefficients des développements (5) sont d'ailleurs définis à leur tour par des relations de récurrence.

Il en résulte que *la singularité au point a_j de la matrice intégrale* (2) *est équivalente à la singularité d'une certaine matrice élémentaire* (4). Les substitutions différentielles $W_j^{(1)}$, ..., $W_j^{(s)}$ de cette dernière matrice fournissent ainsi *une caractéristique analytique complète* de la singularité de la matrice (2) au point a_j et seront nommées *substitutions caractéristiques* de la matrice considérée à ce point. On a d'ailleurs la relation $V_j=e^{2\pi i W_j^{(1)}}$, et les substitutions caractéristiques $W_j^{(2)}$, ..., $W_j^{(s)}$ n'exercent aucune influence sur la ramification. Conformément à la représentation (4), la relation (6) peut être écrite sous la forme

$$Y(x)=(x-a_j)^{W_j^{(1)}}\sum_{\rho=0}^{\infty}C_j^{(\rho)}\frac{1}{(x-a_j)^{\rho}}\sum_{\rho=0}^{\infty}A_j^{(\rho)}(x-a_j)^{\rho},$$

qui met complètement en évidence la nature de la singularité de la matrice (2) au point a_j.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'équation intégrale d'Abel généralisée.* Note de M. **Radu Badescu**, présentée par M. Hadamard.

Nous avons récemment étudié (¹) l'équation intégrale

$$\Phi(z) - \lambda \left\{ F(z)\Phi(\alpha z) + \int_a^b K(z, s)\Phi(zs)\,ds \right\} = \Psi(z), \tag{1}$$

qui généralise celle que Abel avait résolue dans le célèbre Mémoire sur l'isochrone, et nous avons obtenu la solution générale sous la forme

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Phi_n(\lambda), \tag{2}$$

fonction méromorphe dans le plan de la variable λ. Aux pôles λ_n, intérieurs à un certain cercle Γ, nous avons rattaché des fonctions fondamentales, solutions de l'équation (1) sans second membre $[\Psi(z) \equiv 0]$, mais il était essentiel de supposer ces pôles distincts. Le cas où plusieurs de ces pôles coïncident pour une valeur α_0 du paramètre α, qui figure dans leur expression, mérite plus d'attention. Soient p le nombre de ces pôles, et λ_m le point correspondant. En multipliant (1) par le produit infini $\pi(\lambda)$, une première fonction fondamentale sera

$$\chi(z, \lambda_m) = \pi(\lambda_m)\Phi(z, \lambda_m).$$

Or $\pi(\lambda)$ contiendra $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)$ élevé à la puissance p; nous pouvons dériver l'équation (1), multipliée par $\pi(\lambda)$, q fois par rapport à λ_m, car la fonction

$$\chi(z, \lambda) = \pi(\lambda)\Phi(z, \lambda)$$

dépend explicitement de ce paramètre. En faisant $\lambda = \lambda_m$ dans l'équation ainsi obtenue, nous trouvons les fonctions fondamentales

$$\left[\frac{\partial^q \chi(z, \lambda)}{\partial \lambda_m^q}\right]_{\substack{\alpha=\alpha_0\\ \lambda=\lambda_m}} \qquad (q = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Une solution particulière de l'équation (1), pour $\lambda = \lambda_m$, sera alors

$$\left[\frac{1}{\frac{\partial^p \pi(\lambda)}{\partial \lambda_m^p}} \frac{\partial^p \chi(z, \lambda)}{\partial \lambda_m^p}\right]_{\substack{\alpha=\alpha_0\\ \lambda=\lambda_m}},$$

(¹) *Comptes rendus*, 188, 1929, p. 217.

car la solution générale dépend de $(p+1)$ constantes arbitraires (*loc. cit.*).

Toutes ces fonctions sont développables suivant les puissances de z. M. Browne, dans son travail [1] avait étudié le cas où $\Psi(z)$ est de la forme $z^\theta H(z)$, et avait trouvé des solutions logarithmiques; d'après nos recherches il s'ensuit que l'holomorphie de $\Psi(z)$ entraîne celles de toutes les fonctions fondamentales correspondantes au noyau régulier $K(z, s)$. De plus, les fonctions fondamentales qui correspondent aux conditions introduites par M. Browne

$$\frac{\partial^q \lambda_m}{\partial \theta^q}$$

sont nulles identiquement.

Toutes ces considérations nous serviront à développer le noyau $K(z, s)$ d'une manière analogue aux développements d'Hilbert-Schmidt pour l'équation de Fredholm. Une pareille étude a déjà été faite par Mme Nalli [2] pour des noyaux de la forme $K(z; zs)$.

En ce qui concerne la forme sous laquelle nous avons mis la solution de (1), une étude approfondie des coefficients $\Phi_n(\lambda)$ nous a conduits à une catégorie de noyaux d'une catégorie intermédiaire entre ceux de M. Volterra et les noyaux non développables suivant leurs fonctions fondamentales. Ces noyaux sont de la forme $H(zs)\varphi(s)$, où $\varphi(s)$ est la solution du problème de moments

$$\int_a^b \varphi(s)\, s^n\, ds = \Psi_n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

La fonction $\Phi(z, \lambda)$ prendra la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \Psi_n}{\prod\limits_{i=0}^{m} \left[1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right]} \prod_{i=0}^{n-1} \left[1 - \frac{\lambda}{\mu_i}\right] \qquad (\mu_i^{-1} = \lambda_i^{-1} + H_i \Psi_i)$$

en posant $H(zs) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (zs)^n H_n$. Elle converge dans le même cercle que $\Psi(z)$ si les Ψ_n ou H_n tendent vers zéro avec n infini, ou dans un cercle dont le rayon dépend de λ si ces quantités ont une limite finie, différente de zéro.

---

(1) *Thèses*, Paris 1913.

(2) *Rendiconti Accad. dei Lincei*, 5e série, 30, 1921, p. 85, 121; 6e série, 21, 1924, p. 245.

Par les recherches de Poincaré ([1]), nous avons pu rattacher toute équation intégrale de noyau

$$\mathrm{K}(z, s) = \sum_{p=0}^{n} z^p \varphi_p(s) \qquad (n \text{ fini})$$

à des équations différentielles linéaires; ces noyaux sont les plus simples.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Détermination des équations*

$$s = p\,\omega(x, y, z, q) + \theta(x, y, z, q)$$

qui admettent une involution d'ordre 2 et une seconde involution d'ordre supérieur. Note de M. **R. Gosse**, transmise par M. Goursat.

Les conditions nécessaires à l'existence d'un invariant d'ordre supérieur à 2 que j'ai indiquées dans une précédente Note ([2]), s'évanouissent toutes pour l'équation $s = p\omega + \theta$ qui admet une involution d'ordre 2. L'étude directe de l'existence de cette involution amène, après un changement de variable, aux conditions nécessaires et suffisantes

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & q = \omega z + \psi(x, y, \omega), \\ & \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\tau - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\left(z + \frac{\partial \psi}{\partial \omega}\right)\right] + \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} + (\omega z + \psi)\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\right]\left(z + \frac{\partial \psi}{\partial \omega}\right) = 0, \\ & \left(\tau - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\dfrac{\partial \tau}{\partial \omega}}{z + \dfrac{\partial \psi}{\partial \omega}} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \mathrm{H}\tau \quad \mathrm{H}_1\omega + \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial y} + (\omega z + \psi)\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial z} = 0, \end{aligned} \right.$$

où τ représente ce que devient θ quand on y remplace q par $\omega z + \psi$ et où H et H_1 sont des fonctions de x, y et z.

En discutant ces trois conditions, on déterminerait toutes les équations linéaires en p qui admettent une involution d'ordre 2 : le calcul n'est pas impossible, mais il est certainement long. On peut en venir à bout si l'on se contente de chercher les équations linéaires qui, outre une involution d'ordre 2, en admettent une seconde d'ordre supérieur.

En faisant en effet la transformation $\omega = \mathrm{Z}$, on est amené à rechercher

---

([1]) *American Journal*, 7, 1885, p. 203.
([2]) *Comptes rendus*, 186, 1928, p. 1269.

les équations de la forme

$$\frac{d}{dy}\rho(x, y, \mathrm{Z}, \mathrm{P}) = \rho \mathrm{Z} + \psi(x, y, \mathrm{Z})$$

qui admettent, pour le seul système X, une involution d'ordre 3 et une d'ordre supérieur. Il faut alors discuter les conditions nécessaires ([1])

$$\frac{\delta\alpha}{\delta y} + \alpha\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0, \qquad \frac{\delta\beta}{\delta y} + \alpha \mathrm{H}(f) + \mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \mathrm{F}(f) = 0, \qquad \frac{\delta\gamma}{\delta y} + \mathrm{F}(f) = 0,$$

où α, β, γ sont des fonctions de x, y, z, p ([2]).

Elles donnent pour ψ et ρ les formes définies par les relations

$$\psi = \sqrt{\mu\left(2z + \frac{\partial \mathcal{L} h}{\partial y}\right)}, \qquad p = \frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{3h\mu}{2} + \frac{h}{2\mu}(\rho\psi + \mu)^2.$$

où μ, h et h_1 ne contiennent plus que x et y.

Il suffit de revenir à l'équation $s = p\omega + \theta$ et aux conditions (1) pour trouver qu'on peut y satisfaire uniquement en prenant

$$\psi = \sqrt{2\omega\frac{\partial\lambda}{\partial y}}, \qquad \tau = \frac{\partial\psi}{\partial x} + z\left(z + \frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)(\omega z + 2\psi),$$

la fonction λ étant assujettie à vérifier la condition

$$(2) \qquad \lambda\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\frac{\partial\lambda}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\frac{\partial\lambda}{\partial y} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 - \lambda^2 + 3\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \mathrm{X}(x).$$

On est ainsi assuré que toutes les équations correspondantes admettent une involution du deuxième ordre. Un calcul très simple montre qu'elles en admettent une autre d'ordre 3. Elles ont par conséquent toutes un invariant du troisième ordre, pour le seul système X.

Je n'ai pas pu tirer explicitement λ de l'équation (2). Mais celle-ci admet toutes les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\mathcal{L}\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 2\frac{\partial\lambda}{\partial y},$$

et l'on a, par suite, des solutions particulières assez générales en prenant

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}'(x)}{(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^2}.$$

([1]) Voir, pour les notations, la Note précitée.

([2]) Voir R. Gosse, *Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XII, p. 39 et 40.

Ainsi se trouve résolu un cas particulier du problème posé dans mon fascicule du *Mémorial des Sciences mathématiques* [1] : rechercher toutes les équations qui admettent un invariant pour un seul système de caractéristiques.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'intégration des équations différentielles avec des conditions initiales générales* (*variables réelles*). Note de M. **Léon Pomey**, présentée par M. L. Lecornu.

Nous allons montrer que les résultats généraux que nous avons obtenus précédemment dans le cas des variables *complexes* (*Comptes rendus*, 6 avril 1925, p. 1093 et 29 juin 1925, p. 2006) subsistent dans le domaine *réel*. Soit à intégrer le système de k équations différentielles (où λ est un paramètre)

$$\text{(E)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = \lambda f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_k), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

de façon que les valeurs $y_i^1, y_i^2, \ldots, y_i^p$, prises par les solutions $y_i(x)$ pour p valeurs données $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de la variable *réelle* x, satisfassent à k équations de condition arbitraires (les C_i étant des constantes) :

$$\text{(C)} \qquad \psi_i(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_k^1 \mid y_1^2, y_2^2, \ldots, y_k^2 \mid, \ldots, \mid y_1^p, y_2^p, \ldots, y_k^p) = C_i.$$

Nous indiquons d'abord ci-après, moyennant des hypothèses très larges, un *théorème d'existence* des solutions vérifiant ces conditions initiales générales. Nous verrons ensuite, par une autre méthode, que, dans le cas particulier où chaque fonction ψ_i ne contient que les quantités $y_1^i, y_2^i, \ldots, y_k^i$ relatives au seul point x_i, on peut obtenir directement les solutions cherchées comme fonctions implicites.

I. Cas général. — *Hypothèses* A. — Les fonctions f_i des variables $x, y_1, \ldots, y_k$ sont supposées *continues* dans un domaine D et elles satisfont à la *condition de Lipschitz* relativement aux variables y_i.

Hypothèses B. — On suppose qu'il y ait k quantités η_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ du domaine D telles que, pour $y_i^1 = y_i^2 = \ldots = y_i^p = \eta_i$, les équations (C) soient *vérifiées*, et aient alors, par rapport aux quantités η_i, un *Jacobien non nul*.

Théorème général d'existence. — *Moyennant les hypothèses* A *et* B, *si les*

[1] R. Gosse, *Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XII, 1926, p. 40.

points x_i sont suffisamment rapprochés les uns des autres (λ ayant une valeur fixe, d'ailleurs quelconque), le système (E) admet, dans un certain domaine Δ, un système et un seul de solutions y_i satisfaisant aux conditions (C). (Et il en est encore de même si $|\lambda|$ est suffisamment petit, les x_i, étant à des distances quelconques les uns des autres).

En effet, en vertu des *hypothèses* A, on sait que le système (E) admet un système, et un seul, de solutions Y_i continues pour x compris dans un certain intervalle δ et se réduisant, pour $x = x_0$, à Y_i^0, les points x_0 et Y_i^0 étant choisis à volonté dans le domaine D (*solutions de Cauchy*), soit

$$\text{(F)} \qquad Y_i = F_i(x, x_0, Y_1^0, Y_2^0, \ldots, Y_k^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Remplaçons Ox, dans chaque fonction F_i, successivement par p variables auxiliaires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$; puis remplaçons dans les équations (C) chaque quantité y_i^ν ($i = 1, 2, \ldots, k$ et $\nu = 1, 2, \ldots, p$) par la nouvelle expression $F_i(\xi_\nu, x_0, Y_1^0, \ldots, Y_k^0)$.

Les équations (C) ainsi transformées définissent, en vertu des *hypothèses* B, les k quantités Y_i^0 comme fonctions implicites des p variables ξ_ν : ces fonctions Y_i^0 se réduisent respectivement à η_i quand on donne à toutes les variables ξ_ν la valeur x_0 et elles satisfont aux k équations (C) considérées au voisinage de cette valeur x_0.

Or si les p points x_ν sont suffisamment rapprochés les uns des autres, il est possible de choisir le point x_0 assez près à la fois de chacun d'eux pour que d'une part les solutions de Cauchy $Y_i(x)$ soient encore valables pour $x = x_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, p$), et que, d'autre part, les fonctions Y_i^0 soient encore définies pour $\xi_\nu = x_\nu$.

Cela étant, soit y_i^0 la valeur de la fonction Y_i^0 pour $\xi_\nu = x_\nu$, et soit $y_i(x)$ la fonction $F_i(x, x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_k^0)$. Il est évident, que *les k nouvelles fonctions $y_i(x)$, qui forment toujours un système de solutions des équations* (E), *satisfont identiquement aux conditions* (C). C. Q. F. D.

On obtiendrait un résultat analogue en prenant λ suffisamment petit en valeur absolue, sans faire d'hypothèse spéciale sur les x_ν.

II. *Cas particulier.* — Si les équations (C) se réduisent aux suivantes

$$(\gamma) \qquad \psi_i(y_1^i, y_2^i, \ldots, y_k^i) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

toujours avec les mêmes hypothèses A et B, on a le même théorème, mais on peut l'établir cette fois par une autre méthode qui permet de définir directement les solutions $y_i(x)$ (et non plus les constantes auxiliaires Y_i^0) comme fonctions implicites.

En effet, on sait qu'on peut échanger simultanément x avec x_0 et Y_i avec Y_i^0 dans les relations (F); les *solutions de Cauchy* Y_i vérifient donc les relations

$$Y_i^0 = F_i(x_0, x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Chaque second membre, que nous désignerons par $F_i^{x_0}$, se réduit à Y_i quand x et x_0

coïncident, et d'autre part satisfait à l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(\mathrm{P}) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda \sum_{i=1}^{i=k} f_i(x, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_k) \frac{\partial\varphi}{\partial y_i} = 0.$$

Si les points x_ν sont suffisamment rapprochés, on peut choisir x_0 de façon que $\mathrm{Y}_i(x)$ existe encore pour $x = x_\nu$. Remplaçons alors x_0, dans $\mathrm{F}_i^{x_0}$, successivement par k variables auxiliaires indépendantes ξ_1, ξ_2, ..., ce qui donne des expressions $\mathrm{F}_i^{\xi_1}$, $\mathrm{F}_i^{\xi_2}$, ..., $\mathrm{F}_i^{\xi_k}$; et considérons les k équations

$$(\Sigma) \qquad \psi_i(\mathrm{F}_1^{\xi_i}, \mathrm{F}_2^{\xi_i}, \ldots, \mathrm{F}_k^{\xi_i}) = \mathrm{C}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Si nous faisons alors $x = \xi_i = x_0$, ces équations (Σ) deviennent

$$\psi_i(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_k) = \mathrm{C}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

qui sont vérifiées pour $\mathrm{Y}_i = \eta_i$. En vertu des *hypothèses* B, les équations (Σ) définissent k fonctions implicites Y_i des $(k+1)$ variables x, ξ_1, ..., ξ_k, fonctions valables encore pour $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, ..., si x_1, x_2, ..., sont suffisamment rapprochés de x_0, ce qui pourra toujours avoir lieu s'ils sont voisins les uns des autres.

Soit y_i ce que devient ainsi Y_i pour $\xi_i = x_i$. Ces fonctions $y_i(x)$ satisfont identiquement aux équations

$$(\Sigma\ bis) \qquad \psi_i(\mathrm{F}_1^{x_i}, \mathrm{F}_2^{x_i}, \ldots, \mathrm{F}_k^{x_i}) = \mathrm{C}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

qui sont déduites des équations (Σ) en y faisant $\xi_i = x_i$ et dont les premiers membres sont d'ailleurs des solutions distinctes de l'équation (P). Par suite ces fonctions y_i sont bien solutions de (E) et, de plus, satisfont aux équations (γ). Ce sont les solutions cherchées. — Résultat analogue pour $|\lambda|$ suffisamment petit, même avec des x_i non voisins.

ASTRONOMIE. — *Sur les déplacements apparents de l'étoile polaire*. Note [1] de M. **Ernest Esclangon**, présentée par M. Deslandres.

Les observations de l'étoile polaire sont importantes à divers points de vue. Cette étoile est à peu près la seule circumpolaire très voisine du pôle observable de jour. A ce titre, elle est souvent choisie dans les observations méridiennes pour fixer exactement l'azimut de l'instrument. D'autre part les observations en passage supérieur et inférieur, continuées pendant un cycle lunaire de 19 ans, sont éminemment propres à la détermination

---

[1] Séance du 11 mars 1929.

précise des constantes de la nutation, *à la condition de pouvoir faire la part exacte du mouvement propre* de cette étoile, qui est multiple.

L'Observatoire de Strasbourg possède une longue série d'observations de la Polaire (1883 à 1915), comprenant 4700 observations, dont 2050 se rapportant à des passages inférieur et supérieur *consécutifs*. Elles montrent que la position de cette étoile n'est pas connue avec toute la précision désirable.

Ces observations comprennent l'observation du nadir et des mires, ce qui permet de conclure, pour chacune d'elles, l'azimut de la ligne des mires. On n'a retenu que les 2050 observations se rapportant à des passages consécutifs supérieur et inférieur. Si l'on désigne par A_i l'azimut de la ligne des mires déduit d'un passage inférieur, par A_s celui déduit d'un passage supérieur consécutif (antérieur ou postérieur), la différence $A_i - A_s$ n'est pas nulle et varie progressivement avec le temps. Les observations étant réduites d'une manière homogène en utilisant les constantes de Boss (lesquelles sont très sensiblement celles adoptées actuellement pour le calcul des éphémérides astronomiques), en faisant d'autre part la moyenne des différences $A_i - A_s$ par années, pour éliminer les variations diurnes et saisonnières, on obtient pour la représentation de $A_i - A_s$ la figure ci-contre, où chaque moyenne annuelle est représentée par un cercle à l'intérieur duquel est inscrit le *nombre de couples* d'observations correspondantes.

La différence $A_i - A_s$, provient donc d'une *erreur systématique* dans l'ascension droite *admise* pour l'étoile. Cette erreur peut résulter, soit d'un déplacement propre de l'astre, soit d'une connaissance imparfaite des constantes de la précession et de la nutation (la nutation notamment)([1]). Les mesures spectroscopiques de vitesse radiale, encore insuffisamment prolongées à l'heure actuelle, montrent que la période du mouvement propre ne saurait être, en tous cas, inférieure à 30 ans, ce qui indique, d'après la figure, que cette cause de variation est insuffisante pour expliquer les différences $A_i - A_s$. Une seule erreur sur la nutation ne saurait davantage suffire à cette explication. Il est probable que les deux causes interviennent simultanément. La différence $A_i - A_s = -\Delta\alpha \frac{\tang 2\delta}{\cos\varphi}$ où $\Delta\alpha$ représente l'erreur d'ascension droite, est en effet assez bien représentée par la somme algébrique des deux compo-

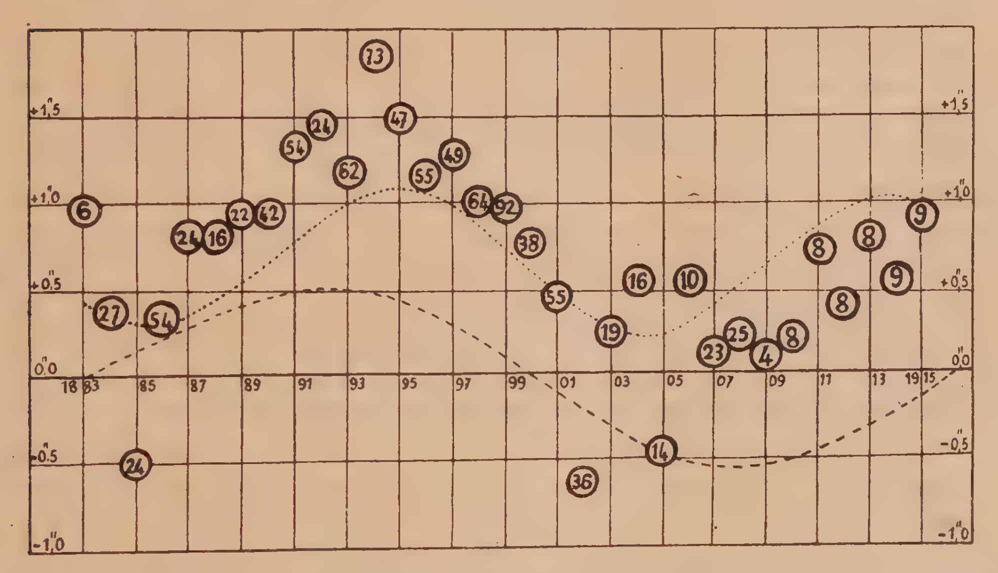
---

([1]) Le déplacement *terrestre* du méridien lié à la variation des latitudes est éliminé dans les différences $A_i - A_s$, mais il n'en est pas de même d'un déplacement du pôle *sur la sphère céleste* provenant d'une cause quelconque.

santes :

$$-\frac{\operatorname{tang} 2\delta}{\cos\varphi}\left[10'',135 - 0'',161(\cos\omega + \sin\omega \sin\alpha \operatorname{tang}\delta)\sin\Omega + 0'',140 \cos\alpha \operatorname{tang}\delta \cos\Omega\right] - 0'',51 \sin\frac{2\pi(t-1900)}{33},$$

Ω désignant la longitude du nœud de l'orbite lunaire, ω l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique, φ la latitude du lieu, t l'année de l'observation. Ces deux composantes sont représentées sur la figure, la première en pointillé, la deuxième en traits discontinus. La première conduirait, dans sa partie périodique (1), à l'existence de corrections à faire sur les axes de nutation, $+0'',064$ pour le petit axe, $-0'',140$ pour le grand axe; chiffres évidemment un peu élevés, le second surtout. Quant à la deuxième composante, elle donnerait une période de 33 ans pour le mouvement propre. Il est clair, d'après l'examen de la figure, que, bien que s'étendant sur un



intervalle de plus de 30 ans, les observations sont encore insuffisamment prolongées (2) pour donner un degré élevé de certitude à ces nombres. Il faudrait connaître d'une manière indépendante et *sûre* le mouvement propre de l'étoile.

---

(1) La constante pourrait tout aussi bien être rattachée à la deuxième composante.

(2) Il existe à Greenwich des observations étendues de la Polaire, mais les azimuts correspondants des mires n'ont pas été publiés.

Ces résultats montrent l'importance qui s'attache à l'observation systématique des passages *inférieurs* et *supérieurs* de la polaire, tant au point de vue de la nutation, qu'à celui des observations méridiennes en général, lesquelles restent entachées d'erreurs systématiques pouvant dépasser $0^s,05$ pour les étoiles équatoriales, lorsque l'étoile a été choisie pour la détermination des constantes instrumentales. Il faudrait y joindre l'observation directe et précise du mouvement propre de l'étoile, rapporté aux étoiles voisines (par la photographie notamment).

MÉTROLOGIE. — *Sur un procédé optique de localisation des surfaces polies.* Note de MM. **Albert Arnulf, A. C. S. Van Heel** et **Émile Perrin**, présentée par M. Ch. Fabry.

Dans une précédente Note (*Comptes rendus*, 187, 1928, p. 1044) a été présentée une méthode d'autocollimation pour la localisation des surfaces optiques sans aucun contact. La précision d'une telle localisation était indiquée en fonction de l'ouverture numérique des objectifs employés. Cette détermination avait été effectuée au moyen d'un microscope à oculaire micrométrique pointant les traits d'une règle, avec une précision ne dépassant pas 0,5 micron. Dans ces conditions, il était impossible d'employer des objectifs d'ouverture numérique supérieure à 0,30.

La présente Note fournit les résultats obtenus au moyen d'objectifs d'ouverture numérique plus grande que 0,30. La mesure de la précision des pointés a été effectuée par interférences au moyen du dispositif suivant :

Le microscope à double croisée de fils décrit dans la précédente Note pointe au milieu de la face supérieure d'une lame à faces parallèles rectangulaire, de 3^{mm} d'épaisseur. Cette lame est fixée aux deux extrémités de sa plus grande longueur. Son milieu peut recevoir de petits déplacements par flexion de cette lame, au moyen de deux ressorts attachés sur sa face supérieure. Ces ressorts sont tendus par l'action d'un levier, commandé par une vis micrométrique.

Les petits déplacements du milieu de la lame sont mesurés au moyen des franges d'interférence produites entre le milieu de la face inférieure de la lame et une surface plane de verre liée au bâti de l'appareil. On observe les changements de position des franges d'égale épaisseur, à $1/25^e$ de frange près, au moyen d'un viseur à oculaire micrométrique.

Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant. Pour chaque

objectif, on effectue quatre séries de dix pointés, et l'on détermine pour chaque série la moyenne arithmétique ε des écarts avec la moyenne des mesures, ainsi que l'écart maximum ε_M, écart de la plus mauvaise des mesures avec la moyenne. Les chiffres qui figurent au tableau sont les moyennes des ε et ε_M des quatre séries de mesures, exprimées en franges ($\lambda = 0{,}546\,\mu$) et en microns. Le chiffre des distances focales est suivi des mentions Ac pour les objectifs achromatiques, Ap pour les apochromatiques.

Foyers.	Ouverture numérique.	ε franges.	ε_M franges.	ε. microns.	ε_M microns.
mm 7 Ac.	0,40	0,42	1,00	0,12	0,28
7 Ac.	0,40	0,49	1,10	0,14	0,31
10 Ac.	0,45	0,43	0,82	0,12	0,23
4 Ac.	0,80	0,25	0,57	0,070	0,16
1,8 Ac.	0,90	0,21	0,46	0,058	0,13
3 Ap.	0,95	0,20	0,41	0,056	0,11
44 Ap.	0,95	0,19	0,36	0,051	0,10
2,5 Ap.	1,25	0,17	0,41	0,047	0,11
2,0 Ap.	1,30	0,12	0,24	0,034	0,067
1,5 Ap.	1,30	0,12	0,25	0,034	0,069
1,6 Ac.	1,30	0,16	0,33	0,0444	0,096
1,8 Ac.	1,30	0,08	0,18	0,023	0,050
1,8 Ac.	1,30	0,13	0,21	0,036	0,058
3 Ap.	1,40	0,10	0,20	0,028	0,056

Ces résultats montrent que cette méthode donne la possibilité de mesurer les très petits déplacements d'une surface optiquement polie. Ce procédé, d'une extrême simplicité, s'il n'atteint pas la précision des interférences, comporte cependant une précision largement suffisante pour la plupart des applications métrologiques. En particulier, il fournit une solution satisfaisante du problème qui consiste à évaluer la longueur d'un étalon à bouts en fonction de celle d'un étalon à traits.

ÉLECTRICITÉ. — *Sur une méthode de mesure de très faibles courants électriques, méthode dite d'électrométrie tachymétrique.* Note de M. **Charles Guilbert**, présentée par M. M. de Broglie.

Les mesures des courants très faibles peuvent se faire par la déviation de l'aiguille d'un appareil ou par l'appréciation en secondes du temps de chute du mobile d'un électromètre, ce dernier procédé est souvent employé pour

la mesure des faibles quantités d'électricité quand l'appareil est convenablement étalonné.

Le quartz piézo électrique de Curie a permis l'emploi d'une méthode de zéro utilisée avec succès dans les laboratoires de radioactivité, il nous a paru intéressant de réaliser un appareil basé sur un principe analogue, mais sans quartz.

Principe. — Au lieu de mesurer une déviation ou un temps de chute du mobile d'un électromètre, nous nous efforçons de maintenir ce dernier immobile sur un point du cadran; ce point est variable suivant la tension utilisée; il suffit pour cela de compenser le courant de décharge de l'électromètre par des charges successives apportées à cet appareil au moyen d'un très petit condensateur chargé à un potentiel déterminé, la fréquence de ces charges successives étant variable suivant l'importance du courant à mesurer.

Description schématique d'un électromètre tachymétrique. — L'appareil se compose essentiellement : 1° d'un électroscope quelconque à feuilles d'or, à secteurs ou autre, d'une sensibilité en rapport avec la tension de fonctionnement; 2° d'un condensateur mobile, coquille cylindrique par exemple, qui en tournant est successivement chargé par une source électrique constante et déchargé dans le système électrométrique; 3° d'un petit moteur à vitesse variable entraînant le système de charge; 4° d'une source électrique continue constante pour charger le condensateur mobile; cette source peut être une pile, un condensateur variable entraîné par le même moteur, une dynamo, un redresseur à lampe, etc.; 5° d'un tachymètre totalisateur mécanique ou électrique, indicateur ou enregistreur, qui note à chaque instant les variations de vitesse du moteur et par conséquent les apports électriques nécessaires pour maintenir fixe le mobile de l'électroscope.

Sensibilité de l'appareil. — Elle dépend, d'une part de la vitesse du petit moteur d'entraînement, d'autre part de la valeur de la capacité du condensateur mobile de charge de l'électroscope. Avec les moteurs usuels le premier facteur est variable dans le rapport de 1 à 5 ou 6 environ par le jeu de rhéostats; on peut y adjoindre un système de changement de vitesse placé sur l'arbre d'entraînement. On peut agir sur le second facteur en ajoutant électriquement un second condensateur de charge à celui déjà en service, et de capacité beaucoup plus grande. Enfin on peut agir sur la tension du condensateur de charge par rapport à la tension de fonctionnement de l'électroscope pour faire varier la sensibilité. Il y a donc autant d'échelles

de lecture qu'il y a de vitesses au changement de vitesse, de condensateurs utilisés et de tensions de charges employées.

L'importance de la charge est fonction de la valeur de la capacité du condensateur mobile et de la différence des tensions entre le condensateur de charge et le système électrométrique ; plus ces valeurs sont faibles et plus les variations d'élongations du mobile de l'électroscope sont faibles. Nous avons calculé qu'il était possible avec un condensateur de charge très faible, une fréquence de charge basse et une tension de charge basse aussi de mesurer des intensités électriques de l'ordre de 10^{-13} ampère environ.

Utilisation. — L'utilisation de cette méthode électrométrique apparaît d'abord pour les mesures d'ionisation et d'une façon générale pour toutes les mesures de courants de très faible intensité dans des circuits très résistants, telles que les mesures relatives aux isolants.

Sans revendiquer une grande originalité dans l'application de procédés dont l'idée n'est pas nouvelle, il nous a paru qu'un tel appareil robuste, souple et suffisamment sensible pouvait rencontrer des applications intéressantes.

OPTIQUE. — *Pouvoir rotatoire magnétique dans un milieu anisotrope.* Note de M. R. de Mallemann, présentée par M. A. Cotton.

La théorie moléculaire de la rotation magnétique dans un milieu homogène est formellement analogue à celle de la rotation naturelle. L'effet d'un champ magnétique extérieur $\mathcal{H}$ sur la polarisation optique s'exprime encore par un *vecteur rotatoire* dont les composantes sont ici des fonctions linéaires, homogènes de $\mathcal{H}$:

$$(1)\qquad \left\{ \begin{array}{l} r = \mathcal{H}_x \Sigma \sigma_x A_{yz} + \mathcal{H}_y \Sigma \sigma_y a_{yx} + \mathcal{H}_z \Sigma \sigma_z a_{zx}, \\ s = \mathcal{H}_x \Sigma \sigma_x a_{xy} + \mathcal{H}_y \Sigma \sigma_y A_{zx} + \ldots, \\ t = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Les coefficients A, a, dépendent de la structure moléculaire ou plutôt atomique; ils sont fonction des orientations des orbites électroniques et de la réfringence des particules [1]. Les coefficients σ sont les facteurs du champ

---

[1] Dans le cas particulier où toutes les particules sont optiquement équivalentes, les coefficients a sont nuls et les A se réduisent aux trois quantités AB, BC, CA, proportionnelles aux produits deux à deux des trois pouvoirs réfringents principaux (voir *Journ. de Phys.*, 6e série, 7, x, 1926, p. 295). Ce cas est à peu près réalisé dans la sylvine.

magnétique *interne* local; ils dépendent de la structure fine du milieu. Leur expression diffère suivant la nature para ou diamagnétique des particules. Le *sens* de la rotation et sa variation avec la température sont déterminés par les valeurs respectives de tous ces coefficients.

L'effet *direct* de l'orientation moléculaire *paramagnétique* sur la rotation serait proportionnel au *carré* du champ et très petit (effet sensible dans le phénomène *transversal* de la biréfringence magnétique). A mon avis, l'orientation n'agit sur la rotation magnétique que d'une manière *indirecte*, en modifiant la grandeur du champ interne.

Le pouvoir rotatoire magnétique *normal* est défini, comme dans le cas de la rotation naturelle, par la projection du vecteur rotatoire sur la normale à l'onde; il s'exprime donc par une fonction linéaire, homogène, des cosinus directeurs α, β, γ. D'après (1), l'expression de la rotation magnétique est ainsi formée de deux facteurs, correspondant respectivement à *deux* variables expérimentales indépendantes : 1° la direction de propagation normale α, β, γ; 2° celle du champ $\mathcal{H}$. Quand on inverse une seule de ces deux directions, la rotation change de signe; son sens reste le même quand on les inverse simultanément [1]. Dans le cas de la rotation naturelle, au contraire, la direction de propagation intervient par les *carrés* α^2, β^2, γ^2; il n'existe qu'*une* seule variable expérimentale *directe*, correspondant à un sens invariable (l'équivalent analytique de l'inversion du champ magnétique correspond à l'existence des deux antipodes).

Si, pour une direction α, β, γ, donnée, on fait varier la direction de $\mathcal{H}$, la loi de Verdet en $\cos\theta$ n'est vérifiée que pour une rotation *isotrope*

$$(\Sigma\sigma_x A_{yz} = \Sigma\sigma_y A_{zx} = \Sigma\sigma_z A_{xy});$$

dans le cas contraire, la loi de variation a une forme tensorielle, déterminée par l'anisotropie finie du milieu. Quand on fait varier la direction de propagation, et, simultanément celle du champ, de manière à maintenir ces deux directions parallèles, ce qui est le cas normal en pratique, on peut repré-

---

[1] On remarquera qu'un corps dans lequel existe un champ moléculaire *spontané* (Weiss), c'est-à-dire un *ferromagnétique*, doit avoir un pouvoir rotatoire magnétique, même quand le champ *extérieur* $\mathcal{H}$ est nul. Cet effet ne paraît guère mesurable dans les ferromagnétiques ordinaires, en raison de leur manque de transparence, mais il semble avoir été observé accidentellement à partir d'une solution ferrique par H. Becquerel. Celui-ci dit que l'effet avait une analogie frappante avec une rotation *naturelle*, mais il n'aurait sans doute pas maintenu cette remarque, s'il avait pu observer en sens *inverse*.

senter la variation de la rotation magnétique par une surface du second ordre, comme dans le cas de la rotation naturelle. Toutefois, en dehors de la région d'absorption, et, à l'exclusion de certains champs moléculaires particuliers, cette surface est toujours ici un *ellipsoïde*; la rotation ne change donc pas de signe (pour un même sens du courant).

On vérifie aisément que la rotation dans un milieu isotrope fluide est définie par l'invariant

$$\Sigma A_{yz} + A_{zx} + A_{xy} = \Sigma BC + CA + AB,$$

comme nous l'avons montré antérieurement.

Dans le cas général d'un milieu anisotrope, l'équation de la surface des vitesses normales, s'écrit, en fonction de r, s, t, sous une forme tout à fait analogue à celle que nous avons indiquée pour la rotation naturelle. Les remarques relatives à l'application du principe de superposition sont exactement les mêmes. En particulier, quand la biréfringence du *milieu* est faible, les deux effets sont sensiblement indépendants, ce qui permet de mesurer le pouvoir rotatoire magnétique normal, même *anisotrope*. Les récentes expériences de M. J. Becquerel remplissent ces conditions théoriques [1].

En résumé, l'anisotropie du pouvoir rotatoire magnétique résulte essentiellement de l'anisotropie de réfringence des électrons, atomes ou molécules. Les rapports des trois rotations *principales* sont fonction de la biréfringence intramoléculaire, qui peut être plus ou moins compensée dans la biréfringence expérimentale du milieu.

PHYSIQUE. — *Les pellicules sphériques électrisées pulsantes, le principe des aires et le phénomène de Zeeman.* Note de M. **Decombe**, présentée par M. Ch. Fabry.

1. Soit r le rayon vecteur instantané d'un électron en mouvement sous l'action d'une force centrale. Supposons la vitesse de cet électron assez faible pour que sa masse puisse être confondue avec celle (m_0) d'un électron libre et au repos, condition nécessaire à la validité du principe des aires et prenons ce dernier sous la forme :

---

(1) M. J. Becquerel vient d'étudier avec succès l'anisotropie de la rotation magnétique dans un cristal. Le principe de sa méthode est celui que j'ai appliqué en 1922 à la rotation naturelle.

Le produit du rayon vecteur r par la vitesse azimutale v_a est constant. Si l'on introduit la condition de Sommerfeld, ce produit constant est égal à $p\frac{h}{2\pi m_0}$, p désignant un nombre entier et h la constante de Planck. Exprime-t-on celle-ci en fonction de la longueur d'onde pulsatoire fondamentale (λ_0) de l'électron, on obtient

$$\frac{rv_a}{c} = p\frac{\lambda_0}{2\pi} \quad (^1)$$

c désignant la vitesse de la lumière. Or la quantité $\frac{rv_a}{c}$ représente (aux termes en $\frac{v^2}{c^2}$ près) le déplacement azimutal de l'électron pendant le temps $\frac{r}{c}$ que met la lumière pour parcourir le vecteur r. D'où l'énoncé suivant :

La quantité dont se déplace azimutalement un électron soumis à une force centrale, pendant le temps que met la lumière pour parcourir le rayon vecteur, est constante (loi des aires). *Elle est égale à un nombre entier de fois* $\frac{\lambda_0}{2\pi}$, λ_0 *désignant la longueur pulsatoire fondamentale de l'électron.*

On vérifie également cet autre énoncé :

L'aire décrite par le rayon vecteur pendant la durée d'une pulsation fondamentale de l'électron est égale à $\frac{\lambda_0^2}{2\pi}$.

2. Le phénomène Zeeman normal se rattache immédiatement et en quelque sorte *de plano* à la conception de l'électron pulsant. Les deux radiations déplacées par le champ magnétique présentent, en effet, relativement à la radiation primitive, une même variation de fréquence $\Delta\nu$ égale à la fréquence de précession f du plan de l'orbite. Il y a donc *résonance* entre cette fréquence de précession et la fréquence des battements qui se produisent entre les radiations déplacées d'une part et la radiation non déplacée d'autre part.

Mais, du point de vue pulsatoire, les radiations déplacées et non déplacées résultent elles-mêmes de battements entre les pulsations propres des électrons orbitaux de l'atome, de sorte que $\Delta\nu$ représente de véritables *battements de battements*. Si l'on convient d'appeler ceux-ci *battements secondaires* des électrons orbitaux, la loi fondamentale de l'effet Zeeman normal s'exprime de la manière suivante :

---

(1) On a $\lambda_0 = \frac{c}{n_0}$, n_0 désignant la fréquence pulsatoire fondamentale de l'électron déterminée par la relation $m_0 c^2 = hn_0$.

Les battements secondaires dus à l'action du champ magnétique sont en résonance avec la fréquence de précession du plan orbital.

Ainsi, tandis que la production des raies est conditionnée par les *battements primaires* des pulsations électroniques, leur dédoublement par le champ magnétique est conditionné par les *battements secondaires* de ces mêmes pulsations.

L'effet Stark peut être traité d'une manière semblable.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur l'inflammation du grisou par les explosifs.* Note de M. A. **Segay**, présentée par M. G. Urbain.

On sait que d'une façon générale la présence de sel marin dans les flammes abaisse leur température. Par addition aux constituants d'un explosif d'une quantité de sel de l'ordre de 25 pour 100, sa détonation donne une flamme dont la partie visible sur les photographies est devenue beaucoup plus petite, en même temps que moins éclairante. Dans le cas de l'amatol, explosif type composé de 80 pour 100 de nitrate d'ammoniaque et de 20 pour 100 de trinitrotoluène, l'auteur a trouvé par mesure des éclairements produits sur un écran que cette flamme est devenue environ 13 fois moins éclairante, ce qui montre que sa température a été notablement abaissée. D'ailleurs, le volume réel de la flamme est resté sensiblement le même, autant que l'on peut en juger par des témoins en coton-poudre.

D'autre part, en cherchant par une mesure de pression dans une chaudière étanche le nombre de calories dégagées dans l'atmosphère de cette chaudière par le tir (dans un mortier du même diamètre que les cartouches) de 50^g d'amatol d'une part, et de 50^g d'amatol additionnés de 16^g de chlorure de sodium, d'autre part, on obtient sensiblement le même résultat, soit $32^{cal},2$ dans le premier cas et 31,0 dans le second.

La température de la flamme s'étant notablement abaissée par l'addition de sel, la vitesse des réactions à l'intérieur de cette flamme a diminué corrélativement d'après une loi générale, et comme le nombre des calories est resté sensiblement le même, on peut en déduire que la durée de cette flamme a dû être allongée par l'addition de sel.

Il peut paraître inattendu qu'une addition qui diminue l'aptitude d'un explosif à enflammer le grisou, ait en même temps pour effet d'augmenter la durée de la flamme de cet explosif. Jusqu'à présent en effet, il a été admis que toutes les flammes sont capables d'allumer le grisou, et que s'il y a des

circonstances où certaines flammes d'explosifs ne l'enflamment pas, c'est à cause de leur extrême brièveté.

La vérification expérimentale de ce fait n'est malheureusement pas pour le présent à notre portée, car les films photographiques actuels ne sont pas assez sensibles pour être impressionnés par la totalité de l'étendue de ces flammes.

Parmi les facteurs qui peuvent diminuer l'aptitude des explosifs à enflammer le grisou, l'auteur a observé qu'un des principaux est la composition des gaz en réaction constituant les flammes consécutives à la détonation; leur aptitude à enflammer le grisou étant très diminuée dès qu'elles contiennent une proportion suffisante et relativement faible de gaz brûlés.

Ceci a été mis en évidence en plaçant dans des cartouches d'amatol des petits tubes métalliques contenant de l'acide carbonique liquide; les tubes sont détruits, et celui-ci est vaporisé pendant la détonation. Malgré la grande imperfection probable du mélange avec les gaz venant de la détonation de l'explosif, l'action extinctrice a été extrêmement nette; par exemple, dans le tir au mortier de cartouches du même diamètre que celui-ci, 37^g d'amatol ont enflammé le grisou; or pour produire l'extinction dans les mêmes conditions de tir, il a suffi d'ajouter 8^g d'acide carbonique à 100^g d'amatol, ou 16^g à 150^g d'amatol.

La même action extinctrice s'est produite d'une façon aussi remarquable dans d'autres conditions de tir, dans des tubes de résistances mécaniques variées, représentant les conditions de détente des gaz sortant du trou de mine. Aussi on peut penser que c'est principalement la composition de la flamme de l'explosif qui conditionne l'allumage du mélange grisouteux, et que cette inflammation peut être empêchée, quelles que soient les autres circonstances, si la flamme contient une proportion suffisante, et variable avec ces circonstances des produits de la détonation complète : acide carbonique, azote, vapeur d'eau. Dans ces conditions, la réalisation de l'explosif antigrisouteux reviendrait principalement à développer par tous moyens la rapidité de formation de ces composés dès le début de la détonation.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur une nouvelle série isomorphe de composés fluorés.* Note de MM. **H. Caron** et **L. Vanbockstael**, présentée par M. C. Matignon.

Lorsque de l'acide fluorhydrique commercial étendu d'eau est abandonné pendant quelque temps dans un verre à expériences ou dans un tube à essais, il se fait un dépôt qui, examiné au microscope, révèle entre divers cristaux, des octaèdres du système cubique.

Nous avons cherché à préparer ces cristaux afin d'en établir la composition. Nous y sommes parvenus de diverses façons : ainsi en substituant au verre de la silice et des sels de calcium, en remplaçant l'acide sulfurique par du sulfate d'aluminium, on obtient un précipité formé presque complètement d'octaèdres.

L'emploi de l'acide fluosilicique au lieu d'acide fluorhydrique donne des réactions plus régulières encore, à condition également que cet acide renferme ou soit additionné d'un peu de sulfate d'aluminium.

Des diverses formules utilisables pour la production du corps nous avons retenu particulièrement les deux suivantes :

1° 50^{cm^3} SiF^6H^2 pur à 10° B, sont additionnés de 10^{cm^3} $(SO^4)^3Al^2$ à 10 pour 100, 100^{cm^3} $CaCl^2.6H^2O$ à 15 pour 100 et 200^{cm^3} alcool à 60°.

2° 50^{cm^3} SiF^6H^2 pur à 10° B, 4^{cm^3} HF pur à 40 pour 100, 15^{cm^3} $(SO^4)^3Al^2$ à 10 pour 100 et 100^{cm^3} $CaCl^2.6H^2O$ à 15 pour 100.

Après 24 heures on décante, on lave d'abord à l'alcool faible pour éliminer l'excès des réactifs employés, puis à l'alcool fort, finalement à l'éther anhydre et l'on abandonne à l'évaporation spontanée.

Ces proportions fournissent $2^g,5$ et 4^g d'un produit présentant au microscope uniquement de beaux octaèdres du système cubique.

Le produit ainsi obtenu est insoluble dans l'alcool et l'éther, très peu soluble dans l'eau (environ 1 partie dans 7250 parties d'eau à 15°), il se dissout par contre facilement surtout à chaud dans les acides étendus.

Chauffé il dégage de l'eau et du fluorure de silicium donnant lieu à un dépôt de silice. Avec l'acide sulfurique concentré il se forme à chaud de l'acide fluorhydrique et du fluorure de silicium.

Composition et formule. — L'eau de cristallisation a été évaluée par le procédé indiqué par Kon-Jannasch pour les fluosilicates hydratés, le fluor par la méthode de Frésenius et par désagrégation, le silicium par action de l'acide sulfurique à froid qui libère le fluorure de silicium du fluosilicate de

calcium sans agir sur le fluorure de calcium, les autres corps sur la substance désagrégée par les carbonates alcalins.

Les proportions pour cent trouvées dans de nombreuses analyses oscillent entre les nombres suivants :

$$\text{Si} : 4 \text{ à } 4{,}3 - \text{F} : 27{,}7 \text{ à } 30{,}5 - \text{Ca} : 18{,}6 \text{ à } 19{,}2 - SO^4 : 10{,}6 \text{ à } 12{,}7$$
$$\text{Al} : 2{,}1 \text{ à } 2{,}7 \quad H^2O : 28{,}1 \text{ à } 32{,}2.$$

Les différences assez grandes existant entre certains résultats s'expliquent par la grande difficulté que présente la désagrégation du produit et par sa teneur en eau de cristallisation que la dessiccation peut éliminer plus ou moins.

Pour établir la formule nous nous sommes basé d'ailleurs non seulement sur ces nombres mais aussi sur ceux fournis par l'examen des corps isomorphes.

Nous avons conclu à un sel triple pour lequel nous proposons la formule suivante :

$$4SiF^6Ca + 8CaF^2 + (SO^4)^3Al^2 + 45H^2O.$$

Sel isomorphe de strontium. — Un sel de strontium analogue peut être obtenu en remplaçant dans les préparations précédemment indiquées le chlorure de calcium par le chlorure de strontium. Avec les proportions indiquées pour le second procédé, celui qui convient le mieux dans ce cas, on obtient 6^g à $6^g,5$ d'un produit homogène formé de beaux octaèdres.

L'analyse a donné les résultats suivants : Si, 3,36 à 3,82; F, 22,8 à 24,4; Sr, 33 à 34,5; SO^4, 8,7 à 11; Al, 1,8 à 2,2; H^2O, 24,4 à 26.

Sa formule serait

$$4SiF^6Sr + 8SrF^2 + (SO^4)^3Al^2 + 45H^2O.$$

Nous avons essayé sans succès de produire le sel de baryum, cela tient sans doute à l'insolubilité des sulfate et fluosilicate de baryum.

Substitution du fer à l'aluminium. — Il existe deux composés semblables aux précédents dans lesquels l'aluminium est remplacé par le fer au maximum. Celui de strontium et de fer notamment s'obtient facilement en mélangeant 50^{cm^3} SiF^6H^2 pur à 10° B., 10^{cm^3} HF pur à 40 pour 100, 20^{cm^3} $(SO^4)^3Fe^2$ à 10 pour 100 et 100^{cm^3} $SrCl^2.6H^2O$ à 15 pour 100. On obtient $8^g,5$ d'un précipité formé de magnifiques octaèdres. Son analyse a donné 3,3 à 3,8 pour 100 de fer, la quantité théorique étant 3,57.

Nous n'avons pu substituer le chrome à l'aluminium et au fer probablement à cause de la solubilité plus grande de ces dérivés.

Substitution du sélénium au soufre. — En remplaçant dans les préparations précédentes les sulfates d'aluminium et de fer par des proportions équivalentes de séléniate de sodium et de chlorure d'aluminium ou de fer, nous avons obtenu les trois composés suivants :

$$4 SiF^6Ca + 8 CaF^2 + (SeO^4)^3Al^2 + 45 H^2O,$$
$$4 SiF^6Sr + 8 SrF^2 + (SeO^4)^3Al^2 + 45 H^2O,$$
$$4 SiF^6Sr + 8 SrF^2 + (SeO^4)^3Fe^2 + 45 H^2O.$$

Avec, par exemple, 25^{cm^3} SiF^6H^2 à 10° B, 2^{cm^3} HF à 40 pour 100, $7^{cm^3},5$ d'une solution renfermant pour 100^{cm^3}, 30^g $SeO^4Na^2.10H^2O$, $7^g,5$ $AlCl^3$ et 50^{cm^3} $SrCl^2.6H^2O$ à 15 pour 100, on obtient 4^g du second sel, cristallisé comme toujours en octaèdres. La teneur théorique en sélénium serait 7,38 pour 100 ; nous avons trouvé 7,2 à 7,4.

L'existence de ces sels apporte, comme on le voit, une contribution nouvelle à l'analogie des éléments Ca et Sr, Al et Fe, S et Se. Ajoutons que leur formation peut servir à caractériser certains corps par voie microchimique, à déceler notamment l'acide sulfurique et l'aluminium dans les acides fluorhydrique et fluosilicique commerciaux.

GÉOLOGIE. — *Sur l'extension du Cambrien dans le sud marocain et la présence dans cette région de plissements précambriens.* Note de **M. L. Neltner**, présentée par M. Pierre Termier.

Le Cambrien, connu depuis longtemps dans le Maroc nord, n'a été signalé que récemment dans le Sud : J. Bourcart le premier le signalait dans l'extrémité ouest de l'Anti-Atlas, puis L. Moret et moi-même le trouvions dans le Haut-Atlas (1). Je viens maintenant annexer au Cambrien tout l'Anti-Atlas et les plateaux qui le prolongent vers l'Est jusqu'au Draa vers Tikirt et le Ouarzazat ; il est probable d'ailleurs qu'il s'y étend encore plus à l'Est, mais je n'ai pu le vérifier, car il m'a été impossible de pousser plus loin.

Ces régions n'étaient connues jusqu'à présent que par les travaux de

(1) J. Bourcart, *Découverte du Cambrien à* Archaeocyathus *dans l'Anti-Atlas marocain* (*Bull. Soc. géol. de France*, 4e série, 27, 1927, *Compte rendu somm.*, p. 10). — L. Neltner, *Sur la géologie du bled Goundafa* (*Comptes rendus*, 186, 1928, p. 707). — L. Moret et L. Neltner, *Découverte du Cambrien à* Trilobites *dans la partie axiale du Haut Atlas comprise entre l'Oued Nfis et l'Oued Ourika* (*Maroc*) (*Bull. Soc. géol. de France*, 4e série, 28, 1928, *Compte rendu somm.*, p. 272).

L. Gentil; les résultats de sa dernière campagne étant encore en grande partie inédits, je les résume brièvement ici. L'Anti-Atlas est un immense bombement anticlinal où l'on rencontre la série suivante : à la base, gneiss, granites et schistes luisants gris ou verdâtres surmontés de quartzites blancs attribués respectivement au Cambrien ou Précambrien et à l'Ordovicien; là-dessus, en discordance, une épaisse série de calcaires et marnes bariolées avec à la base des poudingues et grès, ensemble attribué au Dévonien à cause de sa parfaite concordance avec les argiles schisteuses et quartzites du Djebel Bani où Gentil avait trouvé une faune dévonienne.

La discordance représentait tout naturellement le passage de la chaîne calédonienne.

Moins favorisé que Gentil par les conditions politiques, je n'ai pu pousser jusqu'au Bani; mais, par contre, j'ai pu étudier à loisir une bonne partie de la chaîne principale et son raccord avec le Haut-Atlas; plus heureux que le regretté savant, j'ai trouvé des fossiles au sommet de la série calcaire. J'ai suivi en continuité cette série depuis la région du Ouarzazat jusque chez les Indouzal (sud de Taroudant) d'une part, jusqu'à l'Ouichedenne et l'Agoundis (Haut-Atlas) d'autre part, et en deux points elle m'a donné des *Archæocyathidés :* au Tizi n'Ouichedenne et à Tiout (sud de Taroudant). Cette série calcaire se prolonge d'ailleurs plus à l'Ouest jusque vers Tiznit (au moins) où J. Bourcart a également signalé des *Archæocyathidés*. Les Archæocyathidés caractérisent le Cambrien inférieur ou moyen; ici, je crois pouvoir affirmer qu'il s'agit de Cambrien moyen, car, très au Nord, dans le Haut-Atlas, L. Moret et moi-même avons vu les calcaires cambriens alterner avec des grès verts à *Ellipsocephalus*.

La série cambrienne de l'Anti-Atlas est la suivante : au sommet, une épaisse formation de marnes bariolées et de calcaires dolomitiques noirs, gris ou chamois, souvent très siliceux, en bancs d'épaisseur variable (de 10^{cm} à plus de 20^{m}). L'ensemble de la série doit atteindre et peut-être dépasser 1000^{m}. A la base de cette série apparaît une zone où de minces bancs calcaires alternent avec des schistes et grès bruns ou verdâtres plus ou moins minéralisés par des venues de roches éruptives (andésites) cuprifères. Vers la base, les grès passent à des poudingues.

Ces poudingues, d'épaisseur et de composition très variables (galets de quartzites, de roches éruptives diverses, de schistes plus ou moins métamorphiques, parfois de véritables arkoses à galets de la taille du poing), forment un niveau très constant dans toute la région. Ils reposent chez les Ida Ou Zekri (sud de Taroudant) sur des quartzites (parfois très épais),

blancs ou rosés, qui, eux-mêmes, surmontent une série de poudingues et grès à éléments éruptifs, de schistes satinés et de roches éruptives (granites, pegmatites, diorites, andésites).

Vers l'Est, les quartzites disparaissent très vite, puis c'est le tour des schistes, et vers Tikirt l'on n'a plus sous les calcaires que des grès et poudingues à éléments surtout éruptifs et des roches éruptives.

L. Gentil affirme l'existence d'une discordance entre les quartzites et les poudingues supérieurs; je ne puis me ranger à son avis pour plusieurs raisons. Dans cette région assez disloquée on trouve, tout à côté de lambeaux de poudingues légèrement discordants sur les quartzites, d'autres lambeaux en concordance parfaite, et, si l'on s'éloigne un peu vers l'Ouest ou le Sud, on trouve une série admirablement régulière et concordante; des circonstances locales de dépôt des poudingues me paraissent expliquer très suffisamment les irrégularités du Tizi Oudad. D'ailleurs, un peu à l'Ouest, j'ai vu les quartzites se charger de galets et passer très vite aux poudingues.

Par contre à Tazenakht (sud de Tikirt), j'ai vu la série cambrienne subhorizontale venir reposer en discordance complète sur les gneiss et micaschistes verticaux qui forment le substratum arasé de la grande plaine des Zenaga. Il y a donc eu là des mouvements qui sont à peu près sûrement précambriens, en tout cas antérieurs au Cambrien moyen, mouvements qui jusqu'à présent n'avaient pas encore été signalés dans l'Afrique du Nord.

OCÉANOGRAPHIE. — *Le courant Kurosio du Japon.* Note de M. J. THOULET.

La densimétrie permet, d'après les valeurs prises par le *Challenger* pendant sa croisière à travers les divers océans, de se rendre compte de la façon dont s'accomplit, en surface et en profondeur, la rencontre et la diffusion réciproque d'eaux marines coulant dans des sens opposés. Cette étude, malgré la pénurie relative des documents numériques qu'on possède, s'appuie sur des mesures directes de températures et de densités *in situ* entre la surface et 1500 brasses, appliquées aux deux courants Kurosio et Oyasio qui se heurtent le long des côtes du Japon. Elles ont été recueillies par le professeur Buchanan en mars et avril 1875, pendant le trajet presque en ligne droite sud-nord séparant l'île de l'Amirauté, un peu en avant des côtes nord-est de la Nouvelle-Guinée et Yokohama. Ce trajet traverse la grande fosse profonde de 8185^{m} dite du *Challenger*.

L'étude lithologique des fonds indique la nature volcanique du sol sous-marin non seulement au sud de la fosse, mais surtout sur le plateau au nord de celle-ci où l'activité augmente à mesure qu'on se rapproche davantage du Japon.

Le courant Kurosio coulant du Sud au Nord est à la fois chaud et fortement salé, tandis que l'Oyasio, coulant du Nord au Sud, est froid et relativement peu salé. Au total, la densité *in situ* du premier dont le volume est le plus considérable est inférieure à celle du second. Ces deux courants se heurtent presque de front, quoique avec une légère obliquité, sur la rive gauche du Kurosio dont la portion de rive droite, moins troublée, continue sa route à l'est du Japon en se détournant d'abord vers le Nord-Est, puis franchement vers l'Est en suivant à peu près le 35° latitude nord.

Dans ces conditions, dans sa portion occidentale, les eaux du Kurosio, brusquement arrêtées, s'accumulent en une sorte de mur liquide jusqu'à une profondeur de 400-500 brasses. Là surtout s'accomplit le mélange des eaux du Nord et de celles du Sud caractérisé par un σ_θ qui, mélangé au σ_θ de la rive droite du Kurosio, prend une nouvelle densité *in situ*.

Le courant ainsi modifié dans sa nature propre s'étale en surface et se transforme en dérive. Il passe au nord des îles Sandwich et, poussé par les vents remontant vers le Nord, il rencontre la courbure de la côte américaine de la Colombie britannique puis de l'Alaska et alors, chassé devant les îles Aléoutiennes et les Kouriles, grossi des eaux venant des montagnes bordières ainsi que du détroit de Béring, tout en suivant son cours devenu maintenant d'Est en Ouest et ensuite du Nord au Sud, sous le nom d'Oyasio, il est arrivé à son point de départ initial. Son cycle est fermé et il le recommence. Telle est, dans l'extrême nord du Pacifique, la circulation océanique superficielle particulièrement bien indiquée par les diagrammes et les profils densimétriques thermiques en aires verticales.

En résumé, le mélange et la diffusion des eaux de deux courants marins se heurtant s'effectue suivant les lois physiques qui régissent la rencontre d'eaux de densités *in situ* différentes, ces dernières étant respectivement caractérisées par leur température et leur salure propres agissant en sens inverse l'une de l'autre mais totalisées.

Dans l'hémisphère nord du Pacifique, le courant aéro-océanique Kurosio-Oyasio est le symétrique du circuit aéro-océanique de la mer de l'île de Pâques dans l'hémisphère Sud.

MAGNÉTISME TERRESTRE. — *Valeurs des éléments magnétiques à la Station du Val-Joyeux (Seine-et-Oise) au 1er janvier 1929.* Note de MM. **L. Eblé** et **J. Itié**, présentée par M. G. Ferrié.

Les valeurs données ci-dessous des éléments magnétiques au 1er janvier 1929 sont les moyennes de toutes les valeurs horaires relevées au magnétographe Mascart pendant les mois de décembre 1928 et janvier 1929; elles résultent donc chacune de 1488 lectures. On peut espérer éliminer ainsi l'influence des irrégularités qui ont pu se produire aux environs du 1er janvier.

La variation séculaire des différents éléments est déduite de la comparaison entre les valeurs actuelles et celles qui ont été présentées pour le 1er janvier 1928.

Valeurs absolues et variation séculaire des éléments magnétiques à la Station du Val-Joyeux.
(Latitude : 48°49′16″; longitude : 2°0′52″ E. Gr.).

	Valeurs absolues pour l'époque 1929,0.	Variation séculaire.
Déclinaison	11°15′,2	−11′,3
Inclinaison	64°39′,8	+ 0′,5
Composante horizontale	0,19650	−0,00004
» verticale	0,41501	+0,00008
» Nord	0,19272	+0,00009
» Ouest	0,03835	−0,00064
Force totale	0,45918	+0,00015

Seules les variations séculaires de la déclinaison et de la composante Ouest ont des valeurs notables; elles sont de même ordre que l'année précédente.

BOTANIQUE. — *Sur les anthérozoïdes des* Fucus. Note de M. **Joseph Richard**, présentée par M. P.-A. Dangeard.

Les auteurs sont loin d'être d'accord sur la structure de l'anthérozoïde des *Fucus*. Pour Behrens (1887), Strasburger (1897), Retzius (1906), Meves (1918), la presque totalité du corps de cet anthérozoïde est formée par le noyau, entouré d'une mince couche protoplasmique où se trouve

inclus le chromatophore ou point rouge. Pour Guignard (1889), Oltmanns (1905), Kylin (1916), Mangenot (1921), la plus grande partie du corps est constituée par le protoplasma; le noyau ne serait qu'une petite sphère située au voisinage du point rouge.

Cette divergence tient peut-être à ce que ces auteurs ont étudié des anthéridies et des anthérozoïdes tués par les réactifs et préparés, pour les coupes, par des méthodes différentes. J'ai pensé que l'examen sur le vivant nous renseignerait d'une façon plus certaine sur leur structure. Je me suis donc appliqué, depuis plusieurs années, à suivre leur développement. Les trois espèces les plus répandues sur nos côtes, *Fucus platycarpus*, *vesiculosus* et *serratus* se comportent de la même manière. Mon impression est très nette : le noyau semble bien former la presque totalité du corps de l'anthérozoïde.

En effet, avant la dernière mitose, l'anthéridie renferme 32 noyaux, autant de phéoplastes longs, étroits, plats, verdâtres et quelques gouttelettes lipoïdes. Les cloisons de séparation sont bien marquées; elles ne le sont plus après la dernière mitose, mais par contre on voit clairement 64 noyaux et 64 phéoplastes. Les noyaux prennent un contour de plus en plus net, tandis que les phéoplastes deviennent de plus en plus jaunes. En même temps sur un des côtés de ces phéoplastes, que j'appellerai désormais chromatophores pour indiquer qu'ils ont changé de couleur, apparaît un petit granule rouge, puis un deuxième à côté du premier, puis un troisième et ainsi de suite, jusqu'à ce que le côté tout entier soit bordé d'un ourlet brillant, aminci aux deux extrémités. Chaque chromatophore grandit en longueur et en largeur à côté d'un noyau dont il reste longtemps séparé. Puis, quand il a atteint les deux tiers de ses dimensions définitives, au lieu des noyaux à contour si net et séparés des chromatophores, on ne voit plus dans l'anthéridie que des corps ovoïdes, plus hyalins qui englobent chacun un chromatophore, comme si celui-ci s'était fusionné avec le noyau. Ce sont les anthérozoïdes.

Chaque anthérozoïde étant à peine plus gros que le noyau et occupant la même place, on admettra qu'il en dérive presque exclusivement. D'ailleurs les auteurs qui signalent la présence d'un noyau largement entouré de protoplasma ne s'accordent pas sur sa taille : Kylin, le représente notablement plus gros que Guignard. Quant à Mangenot, je crains qu'il n'ait pris pour le noyau le corps même du chromatophore : car ce qu'il appelle chromatophore se réduirait à un long filament orangé, de même longueur que le noyau et placé à côté. Or le filament orangé n'est autre que l'ourlet

brillant du chromatophore dont j'ai parlé plus haut, et le prétendu noyau est en réalité une plaque mince colorée en jaune vif chez le vivant, qui fait corps avec le filament orangé. C'est le chromatophore lui-même. Celui-ci est souvent creusé en gouttière; il se gondole facilement, se recourbe en C ou se plisse en S; mais l'ourlet rouge l'accompagne constamment et ces deux parties sont inséparables.

Pendant que se forment les anthérozoïdes, par développement d'une membrane autour du noyau et du chromatophore, les gouttelettes lipoïdes semblent rester en dehors.

De fait, à la rupture du sac anthéridien qui met en liberté les anthérozoïdes, elles flottent nombreuses autour d'eux, dans le liquide qui les baigne. Si quelques-unes semblent incluses à l'intérieur, un simple déplacement suffit souvent pour montrer qu'en réalité elles adhèrent de l'extérieur, et quelquefois même on les voit se détacher.

L'anthérozoïde a, en mouvement, la forme d'un fuseau un peu comprimé latéralement. Au repos il est plutôt piriforme, l'extrémité postérieure tendant à s'arrondir. Le corps d'ailleurs paraît assez souple et il peut s'allonger en s'amincissant considérablement. Il est difficile de se faire une idée exacte de l'extrémité antérieure. Elle se continue par un appendice que Retzius signalait déjà en 1906 chez *Fucus serratus*, et dont il faisait un cornet. Cet appendice existe chez les anthérozoïdes de tous les *Fucus* que j'ai étudiés, et il n'a point la forme de cornet. Il est plat, arrondi à son extrémité et disposé verticalement comme un gouvernail. A sa base il semble y avoir une cavité en forme d'entonnoir, ouvrant sur le noyau et par laquelle passe le cil antérieur. On dirait une trappe ouverte à la partie antérieure de l'anthérozoïde, qui resterait dressée dans le prolongement du corps.

Les deux cils sont dans le prolongement l'un de l'autre. Le cil postérieur sort de l'anthérozoïde à l'extrémité postérieure du chromatophore; le cil antérieur semble fixé sur la paroi protoplasmique, à l'intérieur, depuis le chromatophore jusqu'à l'espèce d'entonnoir que j'ai signalé plus haut, par lequel il sort. Il se meut d'un mouvement hélicoïdal qui fait progresser le corps, pendant que le cil postérieur fait fonction de gouvernail.

En résumé, le corps de l'anthérozoïde des *Fucus* semble constitué à peu près en entier par un noyau vraisemblablement modifié. Il est entouré d'une mince enveloppe protoplasmique qui renferme le chromatophore situé à place fixe. Ce chromatophore est formé de deux parties : une plaque mince jaune et un ourlet rouge.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur l'influence de la concentration en ions hydrogène du milieu de culture sur le développement du caféier* (Coffea arabica *L.*). Note de MM. **Theodureto de Camargo**, **R. Bolliger** et **Paulo Correa de Mello**, présentée par M. M. Molliard.

L'influence primordiale de la concentration en ions hydrogène du milieu de culture sur le développement des plantes est aujourd'hui bien connue. Il nous a cependant paru intéressant de faire cette étude avec le caféier, plante que des expériences antérieures nous avaient montrée se développant parfaitement en milieu liquide et qui est de plus extrêmement sensible aux variations d'acidité. Il suffit en effet que la concentration en ions hydrogène du milieu de culture exprimée en pH passe de pH = 5 à pH = 7,5 pour qu'une plante saine devienne au bout de quelques jours chlorotique et paraisse gravement malade.

Les expériences qui font l'objet de la présente Communication ont été faites avec de jeunes plantes de 5 mois, appartenant à la variété C. Bourbon et provenant d'un semis fait sur du sable quartzeux très pauvre, transplantées dans des bocaux de verre protégés contre l'action de la lumière et contenant 250$^{cm^3}$ de la solution nutritive. Chaque bocal recevait 10 plantes. En tout, nous avons utilisé 25 bocaux et 250 plantes dont les dimensions étaient les suivantes : 0^m,13 du collet au bourgeon terminal, 0^m,8 pour la racine.

Des expériences antérieures nous ayant appris que de jeunes plants de caféier peuvent végéter pendant plus d'un an dans de l'eau de source ordinaire, nous avons utilisé celle-ci comme milieu de culture en l'additionnant de sulfate de potasse pour en étudier l'assimilation et de la quantité nécessaire d'acide sulfurique pour faire varier l'acidité dans les diverses séries entre les limites fixées. L'eau utilisée dans ces expériences contenait dans 250$^{cm^3}$ en miligrammes-équivalents :

$$K = 0,0196;\quad Ca = 0,04;\quad Mg = 0,023;\quad SO^4 = 0,005;$$
$$H^2PO^4 = \text{traces};\quad NO^3 = 0,004;\quad Cl = 0,011.$$

Après avoir été additionnées de sulfate de potasse et d'acide sulfurique, les diverses séries présentaient les réactions suivantes :

N° d'ordre.	Additionnés de (en milligrammes équivalents) K.	SO⁴.	Réaction exprimée en pH.
1	—	—	7,2
2	1,07	1,17	4,2
3	1,07	1,15	5,1
4	1,07	1,14	5,8
5	1,07	1,08	6,8

La durée de l'expérience à été de 7 mois; les solutions nutritives ont été renouvelées journellement.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau ci-après :

Réaction du milieu exprimée en pH	7,2	6,8	5,8	5,1	4,2
Nombre de plantes	48	49	50	50	49
Poids des racines	7,1686	8,9910	9,3812	11,5652	11,4602
» tiges	6,5760	3,0333	3,5400	3,3540	3,7800
» feuilles	23,4770	21,8392	23,3038	24,0962	24,8500
Poids total de la matière humide	36,2116	33,8335	36,2250	39,0154	40,0902
Poids de la matière sèche à 110°C	11,5212	12,4744	13,4974	14,2952	14,7652
Poids moyen d'une plante sèche	0,2359	0,2555	0,2699	0,2859	0,3014
Azote °/₀ dans la matière sèche	1,370	1,401	1,371	1,387	1,316
Cendres pures °/₀ (id.)	5,6480	8,795	7,620	7,990	8,151

Nous donnons ci-dessous les résultats de la détermination des divers éléments rapportés à 1g de matière sèche à 110°C., exprimés en milligrammes :

	Série correspondant à une réaction exprimée par pH : 7,2.	6,8.	5,8.	5,1.	4,2.
Ca	8,463	5,714	5,700	5,664	5,246
Mg	2,958	2,017	1,848	1,944	1,688
K	9,138	17,934	16,992	16,237	15,871
Na	1,247	1,563	1,444	1,265	1,907
H^2PO^4	0,410	2,002	1,257	1,646	1,209
SO^4	1,500	11,064	11,040	12,408	13,824

La mesure du système radiculaire des caféiers montre d'autre part que la moyenne de l'accroissement des racines varie dans le même sens que l'acidité du milieu.

Il résulte de ces observations que le caféier doit être considéré comme une plante qui préfère les milieux acides; le degré d'acidité optimum pour sa culture est compris entre pH = 4,2 et pH = 5,1. Ces résultats sont parfaitement d'accord avec les données culturales : la plupart des terres

à caféier de l'État de Sao Paulo (Brésil) sont très pauvres en chaux, et leur acidité exprimée en pH descend rarement au-dessous de $pH = 6,5$. L'emploi de la chaux dans ces sols nous a montré que le caféier est très sensible à l'action de cet élément, et qu'une dose relativement minime de cette base lui est nuisible.

L'examen comparatif des bases absorbées dans les conditions de l'expérience montre, d'un autre côté, que l'absorption du Ca^{++}, du Mg^{++} et du Na^{+} n'est pas influencée par la concentration du milieu en ions hydrogène; au contraire l'absorption de K^{+} diminue sensiblement dans ces conditions.

ANATOMIE VÉGÉTALE. — *Nouvelles Légumineuses Césalpiniées africaines à appareil sécréteur.* Note de MM. **W. Russell** et **L. Hedin**.

Les Légumineuses Césalpiniées pourvues d'un appareil sécréteur schizogène sont relativement rares. Jusqu'à présent, on n'en a signalé la présence que chez les *Copaifera* (L. Guignard, *Bull. Soc. Bot. France*, 39, 1892), l'*Eperua falcata* de la Guyane (Metzger, *Beiträge zur Anatomischen Kenntniss des Holzes der Eperua Falcata*, *Arch. der Pharm.*, 3e série, 22), les *Daniellia* (L. Guignard, *Journ. Bot.*, 16, 1902), le *Cordyla africana* (L. Guignard, *Journ. Bot.*, 19, 1905), les *Detarium* (Em. Perrot et G. Gérard, *Recherches sur les bois de différentes espèces de Légumineuses africaines*, 1907) et le *Sindora cochinchinensis* (H. Lecomte, *Les bois de l'Indochine*, 1926).

Nous croyons intéressant d'ajouter à cette liste les genres *Pterygopodium* et *Gossweilerodendron* où nous avons reconnu l'existence d'un système sécréteur nettement différencié. Ces deux genres créés par Harms (*Englers Bot. Jahrb.*, 1913, et *Notizblatt d. Bot. Gart. und Museum Berlin-Dahlem*, 1925) ne renferment chacun qu'une espèce actuellement décrite, le *Pterygopodium oxyphyllum* Harms et le *Gossweilerodendron balsamiferum* (Vermoesen) Harms.

Au cours d'une mission botanique au Cameroun, l'un de nous a eu l'occasion de récolter les feuilles et les fruits d'un arbre de grande taille connu sous le nom yaoundé d'*Alop*, constituant certainement une espèce nouvelle et qui paraît participer des genres *Gossweilerodendron* et *Pterygopodium*. Il se rapproche du premier par sa gousse pédicellée et du second par la nervation de ses feuilles et de son fruit.

Le *P. oxyphyllum* renferme de nombreux sclérites dans le parenchyme

foliaire. Ces productions font complètement défaut chez l'*Alop* et chez le *Gossweilerodendron balsamiferum*.

Les organes sécréteurs des trois espèces étudiées se présentent sous forme de poches, généralement de grande dimension, réparties dans les tissus parenchymateux des feuilles et des pétioles, ainsi que dans l'écorce, le bois et la moelle des tiges et des racines.

Dans le parenchyme foliaire, les poches sécrétrices sont sphériques ou ovoïdes; elles ont fréquemment une forme de fuseau dans les autres parties de la plante. Ces poches fusiformes, en particulier dans l'écorce de la tige, atteignent parfois près de 1^{mm} de hauteur; elles ressemblent par cela à des canaux sécréteurs. Elles s'en distinguent cependant parce qu'elles sont toujours isolées les unes des autres; ce n'est qu'accidentellement qu'elles confluent en un système continu.

La répartition des poches sécrétrices est sensiblement la même chez les trois espèces, mais il semble qu'au moins dans le parenchyme foliaire le nombre en est plus élevé chez l'*Alop* que chez le *G. balsamiferum* et surtout que chez le *P. oxyphyllum*.

ZOOLOGIE. — *Influence de la température sur la croissance des Planaires.* Note de M. **Abeloos**, présentée par M. Caullery.

J'ai montré précédemment [1] qu'à la température de 20°, la croissance de *Planaria gonocephala* Dugès était limitée à un poids maximum d'environ 25^{mg}. Comme on peut récolter dans la nature — dans la station même d'où provenaient les animaux mis en expérience — des individus d'un poids beaucoup plus élevé, j'ai été conduit à rechercher quelle pouvait être l'action des facteurs externes, et notamment celle de la température, sur la limitation de la croissance.

La température influe tout d'abord sur la rapidité de l'augmentation pondérale. Les lots de Planaires de même provenance et d'abord identiques, élevés à différentes températures et dans les mêmes conditions d'alimentation, atteignent dans le même temps des poids très différents : la vitesse de croissance est maxima vers 12° (température optimum), plus faible à 20°, encore plus faible à 8°. D'autre part, la taille maxima atteinte par les animaux se

(1) *Comptes rendus*, **186**, 1928, p. 602.

montre en fonction de la température. Voici le résumé d'une expérience très démonstrative à cet égard :

A partir de Planaires récoltées le 22 novembre 1928, dans un ruisseau dont l'eau était alors à la température de 12°, trois lots sont constitués, comprenant chacun 20 individus, tous de même taille (poids moyen : 30^{mg}). Ces trois lots, placés respectivement à la glacière (température moyenne : 7°), dans une pièce froide (température moyenne : 12°) et dans une étuve réglée à 18°, sont nourris régulièrement, deux fois par semaine, de fragments de Lombrics.

Les animaux placés à l'étuve, bien que s'alimentant continuellement, ont diminué de poids, pour se maintenir finalement aux environs de 25^{mg}. En même temps, ils ont déposé, du 25 mars 1928 au 20 février 1929, 19 cocons. Les animaux maintenus à 12°, après une légère augmentation de poids, sont restés stationnaires depuis plus de deux mois aux environs de 35^{mg}, et ont pondu pendant ce temps une quarantaine de cocons. Le lot placé à la glacière, après avoir marqué un temps d'arrêt pendant environ un mois, s'est mis à croître rapidement, et les animaux, qui atteignaient 53^{mg} le 11 mars 1929, n'ont pas encore déposé un seul cocon.

De cette expérience et d'une série d'autres, dont le détail sera présenté ultérieurement, je conclus :

1° La taille maxima atteinte par croissance est, pour des conditions de nutrition déterminées, fonction de la température; elle décroît très notablement lorsque la température s'élève. Des faits analogues ont été signalés notamment chez un assez grand nombre d'Insectes, et il semble s'agir d'une loi ayant quelque généralité;

2° Lorsque des Planaires sont nourries continuellement à température constante, la ponte des cocons ne commence que lorsque les animaux ont atteint leur taille maxima;

3° Lorsqu'on transporte des Planaires élevées à une certaine température à une température plus élevée ou plus basse, elles décroissent ou croissent à nouveau pour atteindre la taille maxima caractéristique de la nouvelle température.

Pour chaque température, l'équilibre pondéral, — qui ne se maintient que si l'animal est continuellement nourri, — correspond à une égalité entre l'assimilation et la désassimilation. En pesant les animaux avant et après chaque repas, on peut avoir une idée des intensités de ces deux phénomènes, l'assimilation étant évaluée par l'augmentation de poids à chaque repas, et la désassimilation par la perte de poids dans l'intervalle de deux repas

consécutifs. A une même température, ces deux quantités décroissent graduellement lorsque la taille de l'animal augmente, mais l'assimilation décroît plus rapidement que la désassimilation et finit par l'égaler. Lorsque la température s'élève, la désassimilation devient plus intense, mais l'assimilation n'est pas augmentée dans les mêmes proportions; elle semble même diminuer au-dessus de 15°. Aussi l'égalité des deux phénomènes est-elle atteinte pour une taille d'autant plus faible que la température est plus élevée. Telle est l'interprétation, qui nous est fournie par l'expérience, de cette relation remarquable qui lie la taille limite de l'organisme à la température.

CYTOLOGIE. — *Origine et nature du prétendu squelette céphalique des spermies.* Note (1) de M. **Pierre-P. Grassé** et Mlle **Odette Tuzet**, présentée par M. Caullery.

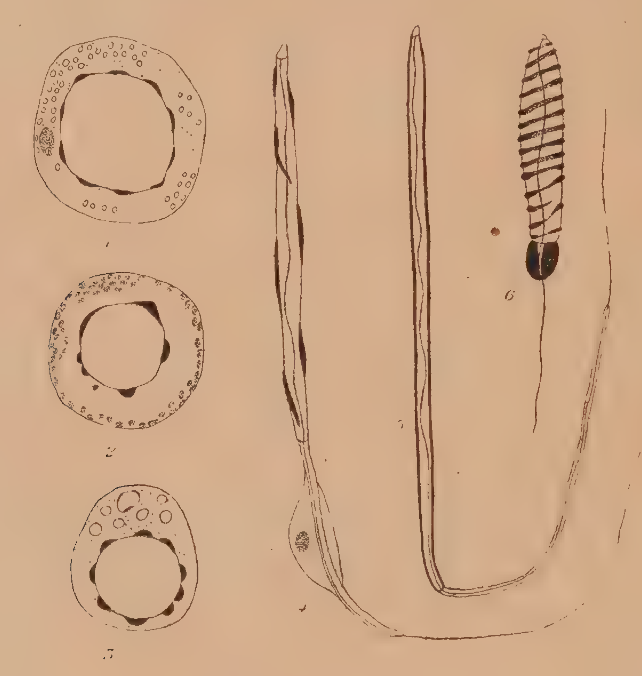
Koltzoff (1906-1908) a montré que la tête des spermies possède, outre le noyau, l'acrosome et les centrioles, des organites intra- et périnucléaires, qui contribuent à lui donner sa forme particulière et jouent le rôle de squelette céphalique. Dans celui-ci, Koltzoff reconnaît deux catégories d'éléments : 1° Un fil spiral ou rectiligne, dont nous avons expliqué la genèse et la signification en 1927; c'est un dérivé centriolaire, homologue strict d'un flagelle; 2° des spires irrégulières ou des grains appliqués sur le noyau (interprétés par Koltzoff comme un filament spiralé simple ou double).

Nous n'étudierons que cette deuxième catégorie, formée d'éléments auxquels nous reconnaissons une certaine autonomie et qui tendent à envelopper le noyau. Nous les nommerons *tégosomes* (*tegos* = toit, couverture).

Les cellules spermatiques typiques des Mollusques prosobranches constituent un matériel favorable à l'étude du squelette céphalique. Le spermatocyte I de *Murex*, coloré sur le frais par du Soudan III (sol. alcoolique saturée), montre en rouge des écailles, des demi-lunes qui bossellent la périphérie du noyau (*fig.* 1). Ces corpuscules ne sont pas un artefact, on les retrouve sur des spermatocytes, fixés et colorés, avec le même aspect. Le spermatocyte II (*fig.* 2) contient les mêmes formations, mais plus grosses et moins nombreuses; avec la spermatide jeune (*fig.* 3), même

(1) Séance du 4 mars 1929.

disposition, mais les tégosomes sont plus réguliers, plus petits et plus nombreux. Dans la spermatide âgée, ils se placent le long du noyau effilé, et, nettement séparés, alternent avec régularité (*fig.* 4). A un stade plus avancé, on a l'impression que, chez le *Murex*, ils se soudent entre eux et forment des bâtonnets appliqués en biais sur le noyau. Dans le spermatozoïde presque mûr, la fusion s'accentue et aboutit, chez certaines espèces (*Pisania* et peut-être *Murex*), à la formation d'un filament spiral périnu-



1 à 5. *Murex trunculus*. 1, Spermatocyte I, Soudan III; 2, Spermatocyte II, Ciaccio: 3, Spermatide jeune, Soudan III; 4, Spermatide âgée, Soudan III; 5, Spermatozoïde mûr, Soudan III. 6, *Theodoxia fluviatilis*, Spermatide, vapeurs osmiques. — Altmann.

cléaire. Les images observées sont alors comparables à celles de Koltzoff. Chez *Theodoxia fluviatilis* (*fig.* 6), les tégosomes forment des anneaux périnucléaires. Vraisemblablement, dans le spermatozoïde mûr, filaments ou anneaux perdent leur individualité et forment un revêtement continu et très mince à la tête du gamète (*fig.* 5).

Dans la spermatide à tous les stades, après fixation osmique, la fuchsine acide d'Atmann colore les *tégosomes*. La technique de Ciaccio, un peu modifiée, et celle de Smith-Dietrich donnent les mêmes résultats que la coloration sur le frais par le Soudan III, mais colorent aussi mitochondries et dictyosomes comme l'a vu Parat (1928). Quelle que soit la fixation, la

laque ferrique ne révèle pas les *tégosomes*. Toutes les réactions positives sont celles des organites de nature lipoïde. Nous ne confondons les *tégosomes*, ni avec le chrondriome, ni avec les dictyosomes, ni avec le vacuome dont nous connaissons la structure, les réactions microchimiques et l'évolution. Il faut reconnaître, dans les cellules mâles des Prosobranches, outre les mitochondries, les dictyosomes, les vacuoles, une quatrième catégorie de constituants cytoplasmiques, de nature vraisemblablement lipoïde : les *tégosomes*. Peut-être ont-ils une origine nucléaire? Nous ne sommes pas en mesure de le démontrer. Les tégosomes existeraient aussi chez les Annélides, les Crustacés, les Insectes, les Arachnides, les Amphibiens et les Oiseaux (Koltzoff). Les corps périnucléaires des cellules mâles des *Notonecta* (Pantel et de Sinéty, Poisson), de *Gryllotalpa* (Voinov), sont peut-être à rapprocher de nos tégosomes.

Il paraît impossible d'attribuer aux tégosomes un rôle de soutien. Nous croyons que leur dissolution aboutit à la formation d'un revêtement lipoïde, qui a d'ailleurs été découvert chez les Mammifères par Popa (1929), au moyen du Soudan III, et dont le rôle physiologique nous échappe.

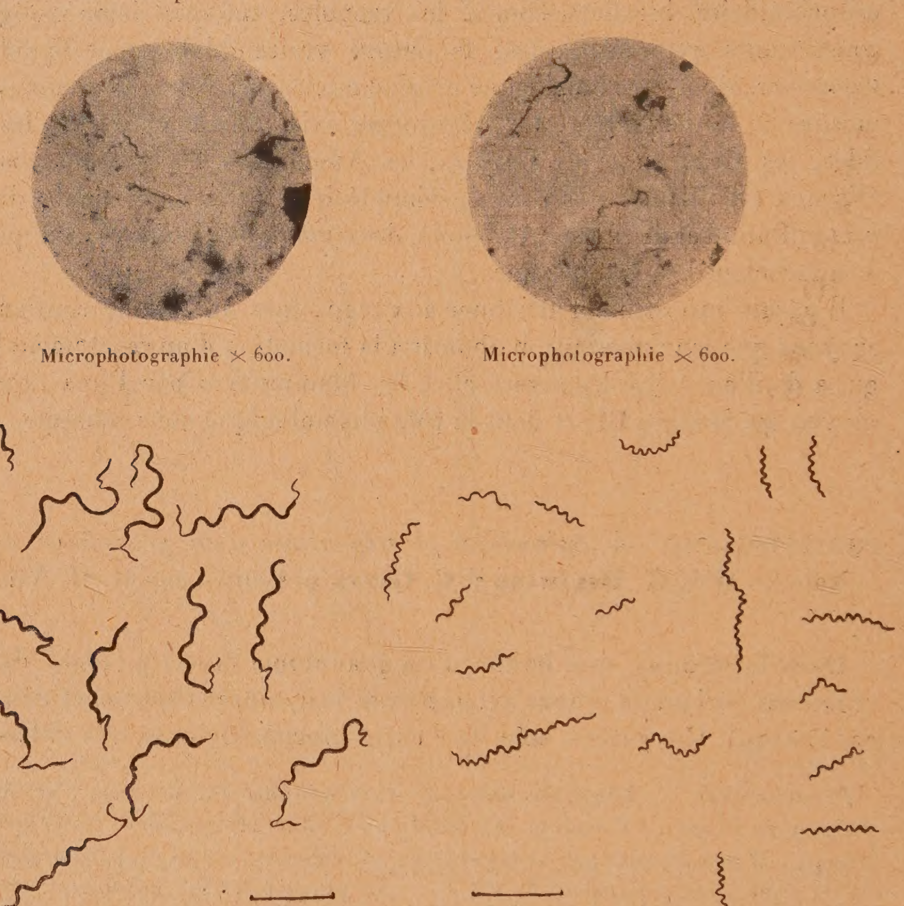
PROTISTOLOGIE. — *Spirochètes et tréponèmes d'un granulome vénérien.* Note de MM. G. **Delamare** et C. **Gatti**, présentée par M. H. Vincent.

Dans le séropus, non fétide, d'un granulome vénérien (placards ulcéro-végétants périanaux), nous avons décelé de nombreux spirochétidés (25 à 30 par champ). Ces germes sont de 2 types morphologiques très différents.

Premier type. — Longueur moyenne, 12^{μ}; minima, 3^{μ}; maxima, 15^{μ}; épaisseur, $0^{\mu},50$ après fixation à l'osmium et coloration au violet de gentiane; $0^{\mu},85$ après nitratation. — Tours de spire peu serrés et assez régulièrement espacés. Leur nombre moyen est de 3 ou 4 (plus rarement de 1 à 5). — La plupart des Sp. présentent une ondulation unique; leur génératrice décrit une courbe simple d'amplitude variable, mais rarement de grand rayon. Chez quelques filaments longs, on enregistre 2 ondulations de sens contraire et, par conséquent, une génératrice spiralée. Rares filaments exempts d'ondulations, possédant une génératrice constituée, comme celle des hélices rectilignes, par l'horizontale tangente à la convexité de leurs spires. — Extrémités très généralement obtuses et pourvues d'un prolongement filiforme dont la longueur peut égaler le quart et, parfois même, la moitié de celle du corps. Ces prolongements, imprégnables par le nitrate d'argent sans mordançage spécial, sont assez souvent spiralés, parfois tordus ou plicaturés sur eux-mêmes à angle aigu. Les extrémités sont droites,

mais parfois incurvées. Coloration suffisante par le Ziehl dilué, plus intense par le violet de gentiane phéniqué après fixation par l'acide osmique.

Les éléments du *deuxième type* ont de 4 à 18^{μ}, en moyenne 10^{μ}. Leur épaisseur est de $0^{\mu},34$. Tours de spire, d'ordinaire plus hauts que larges, réguliers, serrés et séparés par des intervalles sensiblement égaux à la longueur de leurs pas. Les filaments à ondulation unique n'ont rien d'inouï : l'arc de cercle décrit par leur généra-



Microphotographie × 600. Microphotographie × 600.

(Chambre claire). (Chambre claire).

trice est de petit rayon. Rares individus moyens ou longs, à deux ondulations de sens contraire ; en ce cas les sinuosités de la génératrice sont discrètes. Extrémités souvent amincies, en crochet, dont l'une a parfois un prolongement filiforme. Ces organismes se colorent faiblement par le Ziehl dilué ; quelques-uns d'entre eux (longs, grêles, à spires nombreuses, particulièrement serrées) n'ont été observés que sur les frottis imprégnés à l'argent.

Sur les coupes d'une biopsie pratiquée au bord du granulome, des paquets de spiro-

chètes du premier type se rencontrent dans des fissures épithéliales susjacentes à la couche basilaire.

Inoculation négative de la sécrétion riche en germes hélicoïdaux (un essai par scarification de la commissure labiale d'un singe caraya).

L'As, le Hg et le Bi font disparaître tous les spirochètes chez les malades, mais sans modification appréciable du granulome dont la guérison s'effectue ensuite sous la seule influence du tartre stibié.

Les microorganismes du deuxième type présentent presque tous l'aspect de *T. dentium*, variété grêle. Quelques-uns d'entre eux, mis en évidence seulement par la méthode de Fontana, évoquent l'image de *T. pallidum*, de *T. pallidulum* ou de *T. genitalis*. Les microorganismes du premier type sont, pour la plupart, assimilables à *S. refringens*, variété *balanitidis*. Les éléments courts monospiralés du premier type se rapprochent beaucoup du type *eurygyratum*. Certains éléments longs à ondulations lâches présentent des analogies frappantes avec les germes buccaux du type *buccalis* grêle, sans membrane ondulante. Enfin, plusieurs individus longs peuvent s'interpréter comme intermédiaires aux deux types *dentium* et *refringens*.

La spirochétose de notre granulome est donc plus complexe que celle des granulomes de Wise, Bosanquet, Cleland [Sp. à *S. aborigenalis* (?)], de Mac Leman (Sp. à *S. refringens*), de Lenz (Sp. à *refringens* et à *fusiformis*). Elle paraît, au contraire, voisine des spirochétoses à *S. refringens* et *T. pseudopallidum* de Wise, Beaurepaire Aragão et Vianna. L'échec de la chimiothérapie a été également enregistré par Da Souza Araujo. Le résultat négatif de l'inoculation au singe conduit encore à admettre que, dans le granulome sensible au tartre stibié, la symbiose *refringens-dentium* (variété *genitalis*) ne joue aucun rôle étiologique, alors même que certains de ses constituants pénètrent à l'intérieur du revêtement épithélial.

Il est à peine besoin d'insister sur les conséquences que comporte une telle conclusion pour le diagnostic microbiologique des granulomes et des pseudo-granulomes des syphilitiques et des pianiques, ainsi que sur la signification que comportent les microorganismes hélicoïdaux de surface dans l'épithélium ou le derme d'une muqueuse infectée par un virus filtrant ou non.

A 15h40m, l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 16h20m.

E. P.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans les séances de janvier 1929 (*suite et fin*).

Le temps absolu et l'espace à quatre dimensions. La Gravitation, la masse, la lumière, par Émile Sevin. Paris, librairie scientifique Albert Blanchard, 1928; 1 fasc. 25cm,5. (Présenté par M. d'Ocagne.)

Encyclopédie biologique. III. *Les plantes alimentaires chez tous les peuples à travers les âges. Histoire, utilisation, culture*. Vol. II. *Phanérogames fruitières*, par D. Bois. Paris, Paul Lechevalier, 1928; 1 vol. 25cm,5. (Présenté par M. Lecomte.)

Les principes de la mécanique classique, par Ludovic Zoretti, fasc. XXX du *Mémorial des Sciences mathématiques*. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1928; 1 fasc. 25cm,5.

La méthode des fonctions majorantes et les systèmes d'équations aux dérivées partielles, par Ch. Riquier, fasc. XXXII du *Mémorial des Sciences mathématiques*. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1928; 1 fasc. 25cm,5.

Conferenze e discorsi scientifici (1877-1926), par Emanuele Paternò. Rome, Paolo Cremonese, 1928; 1 vol. 21cm.

L'aluminium et ses alliages. Paris, l'Aluminium français, 1928; 1 vol. 22cm.

Sulle Rive dell'Ambra, par Pietro Romanelli. Montevarchi, Presso l'autore, 1928; 1 vol. 19cm,5.

Une grande page de l'histoire de la médecine. La découverte de la transmission du paludisme par les moustiques, par Sir Ronald Ross. Paris, Norbert Maloine, 1929; 1 vol. 19cm,5.

Félix Lagrange (1857-1928) par Lorenzo Bardelli. Firenze, Spinelli et Cie, 1928; 1 fasc. 24cm.

Théorie mathématique de l'élasticité, par Léon Lecornu. Fasc. XXXV du *Mémorial des Sciences mathématiques*. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1929; 1 fasc. 25cm,5.

Le quartz piézo-électrique et ses applications dans la technique des ondes hertziennes, par F. Bedeau. Fasc. VI du *Mémorial des Sciences physiques*. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1928; 1 fasc. 25cm,5. (Présenté par M. Fabry.)

La Flore du Mayombe d'après les récoltes de M. Georges Le Testu, par Fr. Pellegrin. Caen, E. Lanier, 1928; 1 vol. 28cm. (Présenté par M. Lecomte.)